REVISTA

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERIA

Año 4 Nº. 10 Vol. 4 Enero-Marzo 1993

REVISTA
ESCUELA
COLOMBIANA
DE INGENIERIA

Año 4 No. 10 Vol. 4 - Enero-Marzo - 1993
Licencia Mingobierno No. 1595 del 6 de Mayo de 1991
ISSN 0121-5132

Nuestra Portada
Fundadores de la Escuela
Colombiana de Ingeniería

SUMARIO

TRANSVERSAL 6A. NO. 51A-43
TEL: 2871005
SANTAFÉ DE BOGOTÁ, D.C., COLOMBIA

KM 13 AUTOPISTA NORTE TEL: 6760077
FAX: (571) 6760479 A.AEREO: 14520
SANTAFÉ DE BOGOTÁ D.C., COLOMBIA

EDITORIAL

DESARROLLO DE LA EDUCACIÓN EN LA E.C.I.

POR : ALVARO GONZÁLEZ FLETCHER

Los pilares de la sociedad en la mayoría de las naciones, están constituidos por la educación, la economía y la democracia. Estos tres basamentos están íntimamente correlacionados y unos dependen de los otros, siendo, en concepto personal, la educación fundamental para que los otros se desarrollen y consoliden y conjuntamente establezcan el bienestar y el desarrollo de los pueblos.

Si observamos el sistema educativo de países como el Japón, junto con su sistema de selección del recurso humano, podemos encontrar la razón de su desarrollo y del lugar que ocupa en el contexto del mundo actual. Ahora bien, un sistema educativo depende no sólo de la organización y calidad que tenga desde los niveles primarios, sino de la capacidad, espíritu y conciencia investigativa de quienes estén a cargo de él y lógicamente de los recursos económicos invertidos en los programas de ciencia y tecnología y dentro de ellos, específicamente en investigación.

Un ente docente como la Escuela Colombiana de Ingeniería, cuya misión es la de formar ingenieros con una alta preparación técnica, un particular espíritu de solidaridad social, de ética profesional y un concepto claro de la realidad colombiana, no puede estar ajeno a éstas reflexiones y por tanto requiere para afianzarse como entidad educativa de excelencia, centrar todas sus actividades científicas alrededor de los programas de investigación aplicada a solución de los problemas y de las necesidades nacionales y a la innovación permanente del conocimiento y de su transmisión a los educandos.

Para ello se está trabajando en un plan de desarrollo de la Escuela que comprende el estudio de sus necesidades actuales, tanto en instalaciones físicas, equipos, como en aspectos de personal científico y técnico y en la creación de un centro de investigación que constituya el núcleo a partir del cual se desenvuelvan todas las actividades y programas que den lugar a la creación de nuevas carreras, de cursos de educación continuada, de especialización, magister y doctorado, junto a convenios con otras universidades y con empresas públicas o privadas que le permitan adelantar investigaciones aplicadas y le ayuden en la capacitación de su personal científico y su mayor proyección en el campo nacional e internacional. Todo lo cual debe tender a cumplir con los propósitos establecidos en la creación de nuestro centro docente, como es el del servicio al país, a través de una cada vez mayor y mejor calidad. La Escuela no puede estar ajena, como no lo ha estado hasta ahora, al desarrollo tecnológico y por el contrario en la medida de sus recursos debe contribuir a él. ■

El Proyecto de Condiciones de Trabajo en Obras de Construcción

Por : Dr. Rafael A. Moreno

Ingeniero Industrial, Universidad Politécnica de Barcelona. Especialista en Salud Ocupacional, Instituto Nacional de Seguridad e Higiene en el Trabajo de Madrid. Asesor Empresarial

Estamos convencidos de que las particulares condiciones de trabajo que están presentes en la construcción, ameritan un tratamiento que debe diferenciarse de las acciones que se implementan en otras actividades, para lograr una eficaz intervención sobre los Riesgos Ocupacionales que se presentan.

Creemos que se han formulado suficientes reglamentos, normas, decretos, etc. pero también que el accidente y la enfermedad siguen estando cotidianamente presentes en las obras de construcción.

Las medidas que se implementan, en la mayoría de los casos corresponden a niveles de prevención y protección, rara vez se diseñan medidas que tienen que ver con la Intervención sobre los Riesgos. Siendo en esta actividad, en donde el diseñador de un Proyecto, puede y debe, hacer énfasis en la previsión de los Riesgos, ya que está siempre haciendo propuestas en las que fácilmente se pueden incorporar. Es posible desarrollar paralelamente al Proyecto de Obra un documento que contenga las medidas de intervención sobre las Condiciones de Trabajo que se van a generar en el desarrollo de la obra.

Creemos que en la Industria de la Construcción, se dan las condiciones para que podamos hacer Previsión en el diseño, siendo posible plantear un PROYECTO, en el que se contemplen para cada una de las fases constructivas, las medidas técnicas sobre los Riesgos. Se trata de no improvisar, si no de prever cada solución en cada situación de Riesgos.

1.1. EL PROYECTO DE CONDICIONES DE TRABAJO EN CONSTRUCCION. Para tomar una idea de como están las Condiciones de Trabajo en Colombia en la Industria de la Construcción, se pueden plantear los datos que, reflejados en el cuadro siguiente, comparan la accidentalidad laboral en el año 1989 entre la Construcción y el resto de Actividades.

En el podemos ver que se registran más de 117 accidentes por cada mil trabajadores en un año, para una media nacional de casi 42 accidentes por mil trabajadores.

Esta cifra 2,8 veces superior para el sector de la construcción, nos muestra la necesidad de hacer énfasis en el diseño de Medidas de Intervención sobre los Riesgos Ocupacionales.

Nuestra propuesta se puede sintetizar en el desarrollo de un Proyecto de Condiciones de Trabajo, que contenga los aspectos operativos del Diseño de Medidas de Intervención de los Riesgos que se generen en la ejecución de la obra.

Para hacer operativo el Proyecto, este debe estar convenientemente estructurado contemplando entre otros los siguientes aspectos:

PROYECTO DE CONDICIONES DE TRABAJO
- MEMORIA.
- PLIEGO COND.
- PLANOS.
- MEDICIONES.
- PRESUPUESTO.

> "Cuando construyas una casa, pondrás una baranda en torno a la terraza. De ésta manera no incurrirás en la venganza de sangre si alguien cayera de ella abajo."
>
> *DEUTERONOMIO*
> Prescripciones diversas. 22 - 8

ACTIVIDAD	No. Empresas	%	No. Trabajadores	%	No. Accidentes	%	Incidencia I.I.
CONSTRUCCION	8.026	3,46	102.754	4,07	12.048	11.42	117,25
RESTO ACTIVIDADES	224.249	96,54	2'417.121	95,93	93.423	88,57	38,65
TOTAL NACIONAL	232.275	100	2'519.875	100	105.471	100	41,85

* FUENTE: INFORMACION ESTADISTICA ISS -COLOMBIA. NOTIFICACIONES POR ACTIVIDAD ECONOMICA 1.989. pp 95 - 96 PLAN NACIONAL SALUD OCUPACIONAL 1990 - 1995.

Un esquema de cada una de estos componentes del Proyecto, se va a desarrollar seguidamente, con el objeto de que se tengan pautas concretas para hacer posible esta necesidad.

1.2 MEMORIA DESCRIPTIVA. En este apartado del Proyecto se deberían incluir los procedimientos y equipos técnicos a utilizar con relación a los Riesgos Ocupacionales que, presumiblemente puedan producirse, especificando las Medidas de Intervención y las Protecciones técnicas tendientes a minimizarlos y, establecer la evolución de su eficacia, en especial cuando se propongan medidas alternativas.

Deberían valorarse en la Memoria de los Riesgos Ocupacionales, en el marco de un Panorama de Riesgos Ocupacionales de la Obra de Construcción, estableciendo los Grados de Peligrosidad de cada uno de ellos, con lo cual se tendrían posibilidades de establecer Indicadores de Impacto de las medidas que se propongan.

Para facilitar el desarrollo de este capítulo, sería recomendable plantear el Panorama de Riesgos que se prevean, en cada una de las fases constructivas. Existen programas informáticos actualmente que son herramientas útiles para esta etapa del Proyecto.

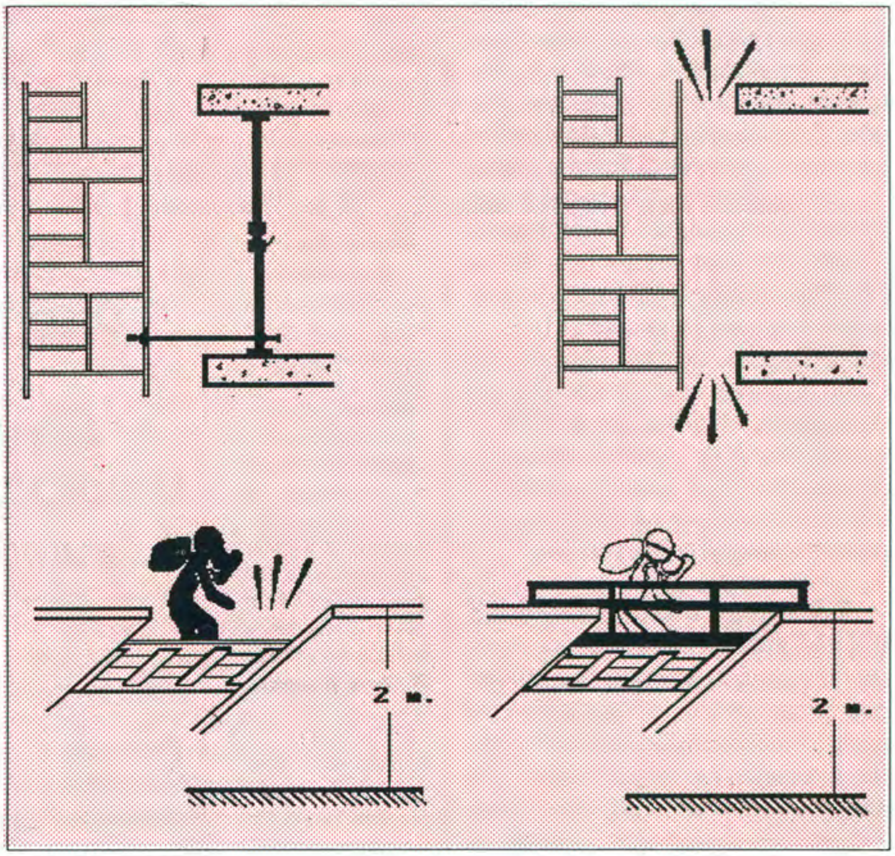
1.3 PLIEGO DE CONDICIONES. El proyecto de Condiciones de Trabajo, deberá tener en cuenta las Normas legales y reglamentos aplicables a las especificaciones técnicas propias de la Obra de que se trate, así como las prescripciones que se habrán de cumplir en relación con las características, el empleo y conservación de máquinas, útiles, herramientas, sistemas y equipos preventivos.

En el Pliego se deberán incluir las Condiciones técnicas que deben cumplir los elementos de protección a utilizar en la obra (resistencia mínima en Kg por metro lineal de las barandillas) así como las de prendas de protección personal a utilizar en la misma. También, las condiciones técnicas que deben cumplir los elementos de seguridad a utilizar en el mantenimiento posterior del edificio edificado.

1.4 PLANOS. El Proyecto de Condiciones de Trabajo, deberá contener unos Planos en los que se desarrollen los gráficos y esquemas necesario, para una buena definición y comprensión de las medidas preventivas definidas en la MEMORIA, con las especificaciones técnicas necesarias.

A modo de ejemplo hemos planteado en el esquema anterior, el arriostramiento de un andamio apoyado sobre el edificio, esta es una posibilidad de incluir diseño de Medidas en el Proyecto.

En el gráfico siguiente se presenta una idea de como debería proyectarse el diseño de una pasarela para



alturas superiores a 2 metros, dotado de una barandilla de una resistencia mínima de 150 Kg. por metro lineal.

1.5 ESTADO DE MEDICIONES. En este apartado se deben contemplar todas aquellas unidades o elementos de Previsión, Prevención y Protección que hayan sido definidos o proyectados.

En general se deben medir y/o cuantificar todas las prendas de protección personal que se prevean que se van a utilizar durante toda la ejecución de la obra, así como la protecciones colectivas, sus componentes y las maniobras de puesta en obra.

También la señalización necesaria y, las instalaciones provisionales de Obra.

1.6 PRESUPUESTO. Finalmente el Proyecto de Condiciones de Trabajo en Obras de Construcción, debe disponer de los recursos necesarios, para lo cual en este apartado se debe incluir el Presupuesto necesario. En él debemos cuantificar el conjunto de Inversiones previstas para la aplicación y ejecución de todo el Proyecto.

El conjunto de Inversiones, tanto en lo que se refiere a la suma total, como la valoración unitaria de elementos. Sólo deberían plantearse partidas alzadas en los casos de elementos u operaciones de difícil previsión.

Deben justificarse las partidas que se planteen mediante la determinación de un Factor de Justificación de cada MEDIDA, el cual se debe determinar teniendo en cuenta el Indicador de Impacto de cada Medida y el Costo de la misma en pesos, eligiendo aquellas Medidas que posean el mayor Factor de Justificación, con lo cual estaremos seleccionando las que poseen un mayor impacto y representa una menor inversión.

2. ALGUNAS CONSIDERACIONES OPERATIVAS. En el esquema anterior se ha planteado una posibilidad que puede servir de base para empezar los posibles diseños de Proyectos. Creemos que se podría analizar en la Obra de Construcción cuales son las Condiciones de Trabajo en las que esta va a desarrollarse, en forma práctica y operativa.

Sin duda, los aspectos concretos tanto en diseños como en costos harán mas fácil la puesta en común de las actividades de los Contratistas y subcontratistas de la Obra.

No cabe duda que inicialmente, se debería comenzar por añadir un ADENDUM al Proyecto de la Obra, para después pasar a una etapa en la cual los diseñadores de Proyectos de Obra, incluyeran la Mejora de las Condiciones de Trabajo en que éstas se van a desarrollar. ■

3. BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA. Seguidamente se relacionan, entre otras, algunas referencias bibliográficas, que a nuestro criterio, pueden orientar a los interesados en el diseño de Proyectos de Condiciones de Trabajo en la Construcción.

C.E.E.: - Directiva del Consejo. Directiva 89/391/C.E.E. Relativa a la aplicación de Medidas para promover la mejora de la Seguridad y de la Salud de los trabajadores en el Trabajo. Luxemburgo, 12 junio 1989.

ESPAÑA.: - REAL DECRETO 555/86. Obligatoriedad de la inclusión de un Estudio de Seguridad e Higiene en el Trabajo en los Proyectos de Edificaciones y obras Públicas. Madrid, 21 marzo de 1986.

ESPAÑA.: - REAL DECRETO 84/90. Por el que se modifican parcialmente las tarifas de honorarios de arquitectos, aparejadores y arquitectos técnicos aprobadas en R.D. 413/89, en relación con el Estudio de seguridad e Higiene en el Trabajo en los Proyectos de Edificación y Obras Públicas. Madrid, 25 enero de 1990.

I.N.S.H.T.: - Manual para estudios y planes de Seguridad e Higiene de Construcción. Madrid, mayo de 1988.

I.N.S.H.T.: - Jornada Técnica sobre el Estudio de Seguridad en Obras de Edificación. Madrid, julio 1986.

M.T.S.S.: - Resolución 2.413/79. Por la cual se dicta el Reglamento de Higiene y Seguridad para la Industria de la Construcción. Bogotá, 22 de mayo de 1979.

M.T.S.S.: - Resolución 1016/89. Por la cual se reglamenta la organización, funcionamiento y forma de los Programas de Salud Ocupacional que deben desarrollar los patronos o empleadores en el país. Bogotá, 31 de marzo de 1989.

MORENO, R.A.: - Aproximación al proyecto de Seguridad e Higiene en Obras de Edificación. Seminario CAMACOL sobre salud ocupacional. Bogotá, febrero de 1990.

MORENO,R.A.: - Manual del Programa informático PRO Versión 2.0. Para la Formulación de los Panoramas de Riesgos Ocupacionales en una Empresa. Moreno Asociados S. O. Bogotá, julio 1992.

MORENO,R.A.: - El Panorama de Riesgos Ocupacionales de una Empresa. B.P. Exploration. Bogotá, noviembre de 1992.

O.I.T.: - Convenio No. 62. Relativo a las prescripciones de Seguridad en la Industria de la Edificación. Ginebra 3 de junio de 1937.

O.I.T.: - Recomendación No. 53. Sobre prescripciones de Seguridad en la Industria de la Edificación. Ginebra, 3 de junio de 1937.

El Análisis de Riesgo en las Decisiones de Inversión

Por : Ing. Luis Mario Barrera
Ingeniero Civil, Universidad La Gran Colombia. Magister en Economía, Universidad de los Andes.
Profesor Catedrático Escuela Colombiana de Ingeniería

1. INTRODUCCION

El principal propósito de un estudio de factibilidad es proveer información que permita llegar a una decisión sobre si vale la pena o no llevar a la práctica el proyecto estudiado. La mayoría de los estudios de factibilidad tratan este problema de la siguiente manera: determinan cuáles son los parámetros de importancia para el proyecto, estiman el valor de cada uno de ellos y con base en éstos estimativos, calculan el valor esperado de la rentabilidad como si todos los parámetros del proyecto se conocieran con absoluta certeza.

Si supiéramos a ciencia cierta (adivinando el futuro) cuál es el valor exacto de cada uno de los parámetros que definen la rentabilidad del proyecto, este procedimiento sería enteramente adecuado. Lamentablemente, en la vida real, no conocemos a ciencia cierta el valor exacto de todos los parámetros que afectan la rentabilidad del proyecto. Si hiciéramos un único cálculo, empleando los valores esperados de cada parámetro, obtendríamos un resultado del cual podríamos decir con certeza casi absoluta que está errado, ya que la probabilidad de que todos los parámetros simultáneamente alcancen su valor esperado es prácticamente nula. Por lo tantò, el contenido informativo de un estudio de factibilidad depende en gran medida del probable margen de error calculado del resultado final pronosticado. Si el margen de error es relativamente pequeño, y si la conclusión permanece inalterada, sin importar cuál caso extremo (ya sea el mejor o el peor) pudiera en efecto ocurrir, un único cálculo, como el provisto por la mayoría de los estudios de factibilidad, es suficiente para una decisión final. Si el margen de error es grande, sin embargo, un único cálculo (el más probable) pudiera ser inútil, ya que los casos extremos podrían conducir a conclusiones opuestas, dejando al que toma decisiones sin ayuda alguna para escoger entre ellas. Esta es la razón por la cual con frecuencia hay inquietudes acerca de algunas decisiones importantes, aún después de haberse procurado el dictamen de expertos (costoso, por lo regular). El contenido informativo de estudios que no especifican el margen de error de sus conclusiones es muy bajo.

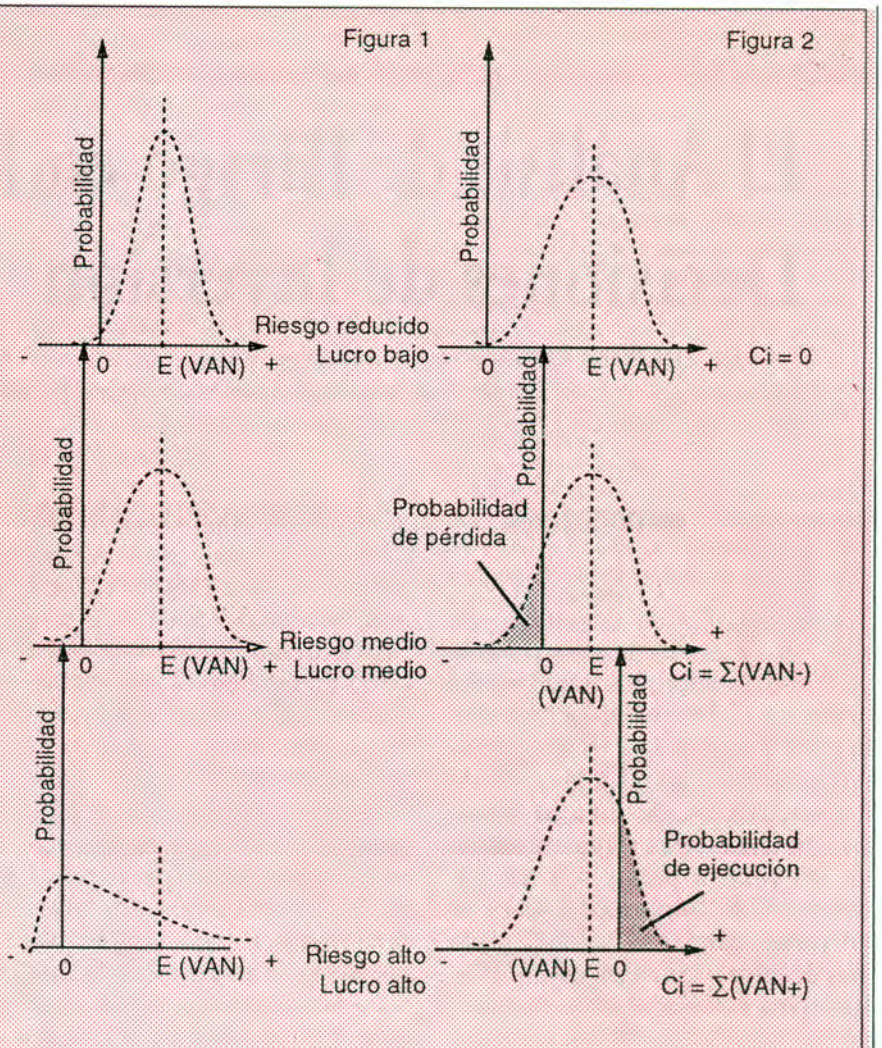
El margen de error de un cálculo algo complejo no es intuitivamente obvio. Este depende no solamente del margen de error de los factores que lo componen sino también de cómo dicho cálculo relaciona estos componentes entre sí y de su posible correlación. Además, se necesita más que una simple identificación del mejor o peor caso posibles. Esto se debe a que los valores situados entre los casos extremos no son igualmente probables. De hecho, lo más común es que haya cierta concentración de la probabilidad alrededor del resultado más probable. Si esta concentración es lo suficientemente fuerte, los valores extremos pueden ser de poco significado práctico para la toma de decisiones. Para que nuestro estudio pueda realmente informar decisiones reales, lo que debemos calcular es la distribución de probabilidad asociada con los resultados calculados, tales como la probabilidad de pérdidas de distintas magnitudes o la probabilidad de ganancias. Un estudio de factibilidad que proporcione estas probabilidades provee información sobre la cual se pueden basar decisiones racionales. En la siguiente sección 2, se describe el método utilizado para calcular tales distribuciones. La sección 3 explica su significado y la forma en que la información que proveen puede ser utilizada para tomar decisiones de inversión.

2. SIMULACION MONTE CARLO.

La simulación Monte Carlo es una forma muy sencilla de obtener la distribución de probabilidad de un resultado a partir de las distribuciones de probabilidad de los datos utilizados. La distribución de probabilidad del resultado se puede aproximar como el límite de una distribución de frecuencias. Es decir, si calculáramos el resultado un número de veces adecuado, utilizando para cada cálculo valores que provengan de las distribuciones de los datos, obtendríamos resultados diferentes cuya distribución de frecuencia se asemejaría tanto más a la distribución de probabilidad exacta del resultado, cuantas más veces repitamos el proceso. Este es precisamente el proceso que se denomina método de simulación Monte Carlo. Para cada uno de los datos, un programa de computadora genera un valor aleatorio (pero tomado de la distribución de probabilidad especificada y teniendo en cuenta las correlaciones postuladas). Con base en un juego completo de estos valores, se efectúa un cálculo del resultado. Este proceso se repite un número elevado de veces (500 o más, en general) y luego se construye una distribución de frecuencia de los resultados obtenidos. Esta distribución constituye una buena aproximación a la distribución de probabilidad del resultado.

Este método de simulación se puede interpretar, de hecho, como una especie de ensayo de laboratorio de eventos futuros. Dado que la computadora escoge valores de las distribuciones que describen a los datos del problema, cada una de las combinaciones en un posible estado futuro de las cosas. Cada una de estas combinaciones es plausible, verosímil e igualmente probable. Por lo tanto, los resultados obtenidos también son desenlaces plausibles, verosímiles e igualmente probables. En la realidad, naturalmente, se dará uno solo de estos eventos, aunque aún no sabemos cuál. Pero tenemos un elemento muy importante de control: si muchos de los desenlaces igualmente probables son indeseables, podemos evitar el riesgo de que ocurran decidiendo no hacer la inversión que los origina. Alternativamente, si un número suficiente de los desenlaces es favorable, podemos decidir, correr el riesgo de que nos toque, al azar, uno de ellos.

En la sección siguiente se describe como usar los resultados de la simulación Monte Carlo para decidir las acciones a tomar con respecto a un proyecto analizado con este método.



Distribución de probabilidad del Valor Actualizado de tres oportunidades de Inversión diferentes.

Ci = Costo de la incertidumbre

E (VAN) = Valor actualizado neto esperado.

3. INTERPRETACION DE LOS RESULTADOS: El resultado que es de interés especial en un proyecto y que constituye esencialmente el parámetro de decisión, es el valor actualizado neto de la inversión. Aunque es posible aplicar análisis de riesgo a otros indicadores económicos o financieros (tasa interna de retorno, relación beneficio-costo, etc.), el uso del valor actualizado neto conlleva ventajas especiales. Por lo tanto, como resultado de la simulación Monte Carlo, siempre calculamos la distribución de probabilidad del valor actualizado neto. En esta sección analizaremos en primer lugar la forma en que se puede caracterizar a esa distribución y llegar a decisiones sobre la inversión correspondiente. En segundo lugar, concluiremos describiendo las recomendaciones que se puedan extraer de la información disponible.

La Figura 1 muestra las distribuciones de probabilidad del valor actualizado de tres oportunidades de inversión diferentes. No existe ningún indicador válido universalmente para escoger entre ellas, pero se puede decir lo siguiente: la persona que es neutral ante el riesgo, es decir, que sólo éste interesada en maximizar la esperanza matemática a largo plazo de sus ganancias, sin importarle el riesgo, siempre escogerá aquel proyecto con valor esperado más alto. Por el contrario, personas que no son indiferentes al riesgo siempre tendrán que sopesar no sólo la diferencia en valores esperados entre oportunidades alternativas de inversión, sino también el riesgo de pérdidas intrínseco a las mismas. [1] Esto es precisamente por lo que el análisis de riesgo es tan útil: presenta información que personas aversas al riesgo precisan para la toma de decisiones.

Otra ventaja importante del análisis de riesgo es que permite calcular el costo de la incertidumbre. Este es la suma máxima que un inversionista deberá pagar por información perfecta relacionada a su oportunidad de inversión. Mostraremos cómo esta información puede ser usada para llegar a decisiones racionales sobre la conveniencia de llevar a cabo estudios para evaluar una oportunidad de inversión y determinar que es lo que debe ser estudiado. [2]

Supongamos que la Figura 2a. representa la distribución del valor actualizado neto de un proyecto. No contiene ningún valor negativo; por lo tanto, dado que nuestra regla de decisión es aceptar proyectos con valores actualizados netos positivos, tenemos toda la información necesaria para llegar a una decisión final y el costo de la incertidumbre es cero. (No es que no haya incertidumbre; pero como no nos afecta, dada nuestra regla de decisión, su costo es cero.)

Supongamos que la distribución del valor actualizado neto sea la dada en la Figura 2b. En tal caso sí hay una pequeña probabilidad de que el proyecto resulte en pérdidas (parte rayada). El valor esperado de los valores negativos es la medida del riesgo al que nos expondríamos al aceptar el proyecto. Este valor es el costo de la incertidumbre. Para constatar que es así, pensemos en cuál sería la suma de dinero máxima que valdría la pena pagar para eliminar completamente la incertidumbre. Sólo tiene sentido comprar información mientras esa transacción aumente el valor esperado de nuestras ganancias. La eliminación de la incertidumbre no puede valer más, por lo tanto, que el valor esperado de las pérdidas que arriesgamos por no contar con la información que nos permitiría evitarlas. O sea, el costo de la incertidumbre es en este caso, el valor esperado de los valores actualizados netos negativos.

Consideremos ahora el caso de la Figura 2c. La media de la distribución es negativa y por lo tanto deberíamos rechazar el proyecto. Pero la distribución revela que hay una pequeña probabilidad de que el proyecto sea factible (zona rayada). Al rechazar el proyecto perdemos esa posible oportunidad. El valor esperado de las posibles ganancias está dado por el valor esperado de los valores positivos. Si a un costo menor que este valor pudiéramos adquirir información perfecta sobre el valor actualizado neto del proyecto, el valor esperado de nuestras ganancias aumentaría.

O sea, por un razonamiento análogo al anterior, el costo de la incertidumbre está dado por el valor esperado de los valores actualizados netos positivos. La regla general es que el costo de la incertidumbre está dado por el valor esperado de los valores actualizados netos con signo opuesto al de la media de toda la Distribución. En otras palabras, el costo de la incertidumbre es el valor esperado de las posibles ganancias que dejamos de percibir cuando rechazamos un proyecto, o el valor esperado de las pérdidas que arriesgamos cuando aceptamos un proyecto.

El costo de la incertidumbre es una función de la información disponible. En el análisis de riesgo es posible calcular la contribución de cada uno de los datos de un proyecto al costo de la incertidumbre total. Sabiendo el costo de la incertidumbre atribuible a cada dato y el costo de los estudios adicionales que pudieran aclarar más ese dato, es posible diseñar estudios subsiguientes que sean eficientes, en el sentido de que sólo se adquiera información cuyo costo sea menor que la disminución correspondiente en el costo de la incertidumbre.

4. REGLA DE DECISION. Después del análisis de un proyecto hay tres posibles cursos de acción: aceptarlo, rechazarlo o adquirir información adicional. Las técnicas explicadas hasta aquí nos permiten escoger entre ellas en forma racional.

Primero debemos determinar si es conveniente o no adquirir información adicional. Cualquier estudio que emprendamos podrá reducir la incertidumbre, pero es poco probable que la elimine totalmente. Pero no es tanto la incertidumbre como tal que nos interesa, sino más bien su costo. Si el costo de la incertidumbre es cero el proyecto es inequívocamente malo o bueno, no se justifican estudios adicionales. Si el costo de la incertidumbre es alto, debemos proseguir a estimar en cuánto podría reducirse la incertidumbre mediante un estudio. Si la reducción posible es mayor que el costo del estudio (incluyendo beneficios que se dejarían de percibir si se postergará un buen proyecto) entonces es menester un estudio adicional. De otro modo debe tomarse una decisión definitiva inmediatamente.

5. CONCLUSION. El análisis de riesgo es una técnica que proporciona información vital relativa a decisiones de inversión. Provee una medida del riesgo asociado con un proyecto. Provée, además, una base sobre la cual determinar la conveniencia de llevar a cabo estudios adicionales, y hace que estos estudios sean más efectivos, al identificar y ordenar las fuentes de incertidumbre de acuerdo a su impacto sobre la decisión final. ■

(1) A menos que la aversión al riesgo del que toma la decisión sea cuantificable en una función de utilidad, en cuyo caso sí es posible formular una regla de decisión explícita.

(2) Lo que sigue se aplica estrictamente a personas cuya actitud ante el riesgo es una de neutralidad. A pesar que el cálculo es ligeramente diferente para personas con aversión al riesgo, los resultados generales le son aplicables.

Cuatro Ideas Básicas para Establecer Programas de Calidad Total

Por : Hugo Fernando Valderrama Sánchez

Ingeniero de Sistemas y Computación de la Universidad de los Andes, Máster en Administración de Empresas y Especialidad en Finanzas de la Universidad de La Salle, President's Class Member 1987 de la Universidad de Harvard. Actualmente es Presidente de NCR de Colombia S.A.

La primera idea para asegurar el correcto establecimiento de un Programa de Calidad Total es entender realmente el concepto. Por esa razón voy a tratar de explicarlo mediante un ejemplo de la vida real.

Si tratamos de hablar de perfección y concretamente hacemos referencia a la perfección espiritual, vamos a ingresar en un campo donde lo que creíamos que debería ocurrir... ocurre precisamente, pero a la inversa en el caso de la perfección.

Supongamos que podemos establecer una comparación en cuanto a perfección espiritual entre un "santo varón" y un delincuente.

Cuando el "santo varón" ve pasar por la calle una linda chica con minifalda, piensa que el "solo pensar que iba a pensar" en lo lindas que tenía las piernas la chica que pasó, es una imperfección espiritual y por tanto podría clasificarla como pecado. El delincuente asesina a una persona de un balazo y cuando se le pregunta por qué lo hizo, de pronto nos puede responder diciéndonos: "él me estorbaba" y cuando le decimos: "¿usted qué sintió?" él podría responder con algo así como "yo le pedí a mi Diosito lindo que me ayudara para que no me fallara el tiro".

Cada ser humano tiene por dentro, una especie de filtro que permite evitar que los pecados gordos pasen a su espíritu, pero no siempre el tamaño de los huecos de ese filtro es igual y varía de persona a persona. Digamos entonces que el "santo varón" posée un filtro con huecos u orificios muy pequeñitos que prácticamente no dejan pasar problemas o defectos grandes al espíritu y en caso del delincuente profesional, prácticamente no existe filtro que permita detener su mala intención o acción.

Lo anterior nos lleva a concluir que en la medida en que nos acercamos a la perfección, las exigencias se van volviendo más agudas mientras que en la medida en que estamos lejos de la perfección, la exigencia es mínima. Es posible que el "santo varón" se encuentre a sí mismo imperfecto y pida perdón por estar muy lejos de ser perfecto; en cambio, el delincuente conteste al preguntarle por su forma de ser que se considera perfecto y que no encuentra defectos graves en su comportamiento.Cuanto más nos acercamos a la Calidad Total, internamente comenzamos a experimentar una situación de autocrítica que nos lleva a un mejoramiento permanente como fruto de una evaluación contínua de nuestras realizaciones. Una compañía que está lejos de practicar la Calidad Total, es normalmente una empresa en la cual la gente no experimenta internamente cambios importantes o cuestionamientos sobre las formas en las cuales se ejecutan las cosas, digamos que su sensación es que todo está funcionando perfectamente.

El "santo varón" se ve imperfecto a sí mismo pero todo el mundo que lo conoce sabe perfectamente que es un "santo varón". El delincuente se ve perfecto en su interior pero todos los que lo conocen saben que es una mala persona.

Las empresas que practican la Calidad Total, se ven imperfectas por dentro cuando se examinan ellas mismas y se ven extraordinarias por fuera cuando son observadas por los demás.

La segunda idea es consentir al cliente y se explica en una forma muy sencilla, con un ejemplo que en la vida real nos hace reflexionar acerca del significado del "consentir al cliente".

Desde luego, aquí estamos haciendo referencia a los clientes internos y a los clientes externos, que consentidos en la forma correcta, deberán aportar a la Calidad Total, resultados extraordinarios, precisamente a causa de esta acción.

Examinando el ejemplo podríamos mirar como las relaciones entre las personas tienen una influencia enorme sobre los resultados que se obtienen para realizar alguna acción en la vida, o como unas malas relaciones provocan entorpecimiento en las tareas, retardos, mala calidad y en fin, todo lo que la poca voluntad de hacer algo es capaz de obtener.

Las buenas relaciones entre las personas provocan extraordinarios resultados, agilización en los procesos, calidades extraordinarias, tareas mucho más completas de lo que uno se podría imaginar, lo mejor de lo mejor para quien recibe el servicio o la atención a causa de una buena relación.

Quizás por eso es bien conocido que el éxito en la vida depende en un 15% de la inteligencia de lo que haya uno estudiado profesionalmente, en otro 15% del trabajo fuerte y honrado y en un 70% de la calidad de las relaciones con los demás.

Una forma fácil de evidenciar lo que las relaciones pueden hacer por los resultados en una empresa o en cualquier sitio puede verse cuando dos personas se odian y trabajan en la misma empresa, requiriendo una de ellas en algún momento un trámite o trabajo por parte de la otra. Con plena seguridad todo va a sufrir un tratamiento lento o va a ser casi imposible realizar la labor solicitada, o se va a encontrar con que está en contra de alguna norma o de alguna especificación o pasado un tiempo se detectará que faltan papeles o soportes por llenar o simplemente se retardará por olvido involuntario o por que es muy difícil de realizar la labor, o bien terminará refundiéndose como algunas cosas de esas que "a veces se pierden".

El caso opuesto de las buenas relaciones, lo encontramos en un extremo, representado por un par de personas de diferente departamento pero que dentro de una Compañía, ambas sienten atracción o admiración una por la otra o bien, una de ellas, la que debe prestar servicio, siente atracción o admiración por aquella que está solicitando la tarea.

En este último caso, lo que va a ocurrir es que la labor va a salir en tiempo 'record', no es difícil en absoluto, no hay procedimiento o norma que lo impida y por el contrario, en adición a esa tarea van a salir asuntos complementarios que la mejoran y que hacen en últimas a quien la solicitó más feliz de lo que pudiera haber estado con la sola realización de la tarea original.

Aún en la labor más complicada de todas, la respuesta de la persona que da el servicio o que atiende la tarea a realizar será algo como lo siguiente: "no te preocupes, se ve difícil pero encontraremos alguna salida para lograr que esto que tú requieres sea efectuado perfecto y en el menor tiempo posible, déjalo en mis manos".

La tercera idea podríamos llamarla con motivo de los porcentajes y de las mediciones que se hacen en la Calidad Total con mucha frecuencia, ME GUSTAS EN UN 100%.

Esta idea es la que facilita en la vida cotidiana que cada uno de los seres humanos y cada una de las empresas logre sobrevivir sin amargarse el rato y sin hacerse la vida imposible.

"ME GUSTAS EN UN 100%" invita a reflexionar sobre la perspectiva que opera en una Compañía, respecto a un servicio, a un producto o a una persona cuando hay un gusto total por cada uno de ellos. Suele ocurrir que cuando hay un gusto al 100%, los defectos o las desviaciones son miradas con mayor benevolencia hasta un punto tal que a veces esos defectos o deficiencias de las empresas o de los servicios o de los productos o de las personas se vuelven cualidades para el usuario o para el cliente y en algún momento, llegan a pesar tanto que hacen la diferencia respecto a la competencia.

En la vida real este asunto es un problema de actitud claramente establecido. Se trata pues de una actitud positiva respecto a un proveedor que transforma de inmediato las reacciones y provoca una preferencia que en últimas se provee en resultados positivos para las partes involucradas.

Lo anterior no significa que los usuarios o clientes desconozcan la realidad de las deficiencias o de los defectos o errores de las Compañías, personas, productos, o servicios con las cuales ellos interactúan, pero sí significa que ante las deficiencias, se tiene mayor paciencia o tolerancia e incluso hay una motivación directa de ayuda para buscar solucionar los problemas que existan o para buscar, en forma positiva, el enfoque que transforme en virtud lo que hasta el momento era un defecto.

Los lunares son en cierta forma un defecto en la piel, sin embargo un lunar ubicado cerca a los labios de una linda chica, puede transformarse en la cualidad que la distingue y la hace adorable, tal como dice la canción "ese lunar que tienes cielito lindo junto a la boca, no se lo des a nadie cielito lindo que a mi me toca".

No hay problema o defecto en ser morenos, o altos o bajitos o calvos, o velludos, o gordos o flacos, puesto que en todos los casos se encuentra siempre alguna persona a la cual "le gustamos en un 100% o una persona que nos gusta el 100%".

Pensar en que existe una Compañía perfecta o una persona perfecta o un producto perfecto o un servicio perfecto es utópico. Podemos esperar que los productos, servicios, personas o Compañías estén muy cerca de la perfección y tengan un mínimo porcentaje de falla, pero siempre ese mínimo será para nosotros un dolor de cabeza, excepto si hemos logrado colocar en la mente de nuestros usuarios, la frase mágica que permite reducir, con apoyo del mismo usuario, el porcentaje de defecto y entre otras también permite minimizar el impacto que dicho defecto trae sobre la operación diaria.

"ME GUSTAS EN UN 100%" permite ver en forma integral a una Compañía, a una persona, un servicio o un producto, valorar todas las cosas buenas que se tienen y revisar las malas dando una calificación totalmente balanceada y mucho más equilibrada cuando nos referimos en justa proporción a un defecto de nuestros proveedores.

Lo anterior significa que con sus cualidades y sus defectos nos sentimos contentos con lo que recibimos en forma integral, puesto que la suma de las cosas positivas y de las negativas da un valor total muy positivo a favor de nuestro proveedor.

Finalmente la cuarta idea es quizás la más sencilla pero también la menos recordada. La podríamos resumir "TODO NIÑO REQUIERE TIEMPO PARA CRECER".

En la vida todo proceso necesita un tiempo para su realización. Particularmente los niños tienen un desarrollo muy lento y su calidad como seres humanos es muy baja y muy mala, si los valoramos por la capacidad de hacer labores básicas o primarias en los primeros meses ó años de su existencia.

Un niño con dieciocho meses de edad, muy probablemente camina en forma torpe, no sabe comer por sí solo, no sabe hablar, no puede vestirse solo, no sabe controlar los esfínteres, no es capaz de entender siquiera órdenes sencillas, no sabe leer, no sabe escribir, no sabe saltar, no sabe hacer labores tan sencillas como el simple hecho de colocarse y amarrarse los zapatos. En calidad humana, un niño de apenas dieciocho meses, podría ser valorado perfectamente con la mínima calificación, sin saber que dándole el tiempo requerido para su maduración y aprendizaje en la vida puede llegar a ser un hombre o una mujer excepcional.

Igualmente ocurre con las empresas, los servicios, los productos y las personas dentro de una empresa y por supuesto con la calidad total. Hay que dar un tiempo para que la curva de aprendizaje tenga su cocción mínima requerida y podamos comenzar a exigir los niveles de madurez y los resultados propios de esos niveles. Mientras tanto lo único que podemos hacer es apoyar todo lo que sea posible, el correcto desarrollo del aprendizaje, de tal manera que en el menor tiempo posible, tengamos el mayor número de resultados positivos.

Un buen programa para el desarrollo de la calidad total en una empresa, requiere en adición de planes profesionalmente elaborados y controles periódicos, de una gran paciencia que permita ir creciendo sin otra presión más que la que en forma natural podemos estar ejerciendo.

En síntesis, la implantación de programas de calidad total exige nuestra comprensión respecto a las implicaciones que el nivel de perfección trae consigo y la labor de autocrítica permanente que se va a generar en el momento en que entremos en un programa de calidad total. Así mismo, las relaciones humanas bien llevadas permitirán siempre agilizar todos los proyectos que tengamos en mente realizar, teniendo en cuenta que hay que consentir a nuestros clientes.

Un enfoque positivo pero realista del mundo que nos rodea, donde se incluyen empresas, personas, servicios y productos, nos ayudará a valorar en una forma integral todo lo que vemos, percibimos o recibimos y por supuesto a gustar del 100% de lo que tenemos y finalmente, en toda la realización de las tareas que incluyen los programas de calidad total, es necesario recordar que los procesos tienen un tiempo para su maduración y que aunque podemos agilizarlos un poco no podemos evitar el paso obligatorio por la curva de aprendizaje.

La calidad total es una mezcla de la implantación de las cuatro ideas mencionadas y por supuesto de una serie de nuevas disciplinas administrativas que traen consigo un mejoramiento general de la Compañía.

Propagación de Errores en la Enseñanza

Por : Gustavo Perry Z. (†)
Conferencia Julio 1974. Profesor de Matemáticas Universidad Nacional y Escuela Colombiana de Ingeniería. Director del Departamento de Matemáticas en los Primeros Años de la E.C.I.

El título de esta charla, dicha en tono menor, puede prestarse a equívocos que conviene disipar, para que ninguno de ustedes se llame a engaño; los errores a que aquí se alude nada tienen que ver con el concepto que a dichos entes, de tan elusiva apariencia, asigna la teoría probabilística, sino con los de naturaleza más prosaica, cometidos por los estudiantes en sus pruebas de conocimientos y los que cabría calificar mejor de yerros, faltas o equivocaciones. Si bien el tema no da para mucho, lo he tomado como pretexto para decir unas cuantas trivialidades sobre la docencia universitaria de matemática, en abono de lo cual solo puedo alegar como autoridad mi condición, precaria, quizá, para algunos, de viejo catedrático de la materia en esta Universidad Nacional y ahora en una entidad particular, de reciente creación.

Comienzo por recordar, para fines posteriores, que la distinción hecha por varios tratadistas, entre matemática pura y matemática aplicada no es ni mucho menos artificial; obedece al tenor del lenguaje filosófico, a un imperativo categórico proveniente de la diferencia de finalidades y, por tanto, de medios, entre una y otra. La matemática pura es hoy una ciencia autónoma, que sigue sus propias leyes de desarrollo y cuyas posibilidades o perspectivas se salen de sus presupuestos investigativos; por tanto, su aprendizaje para quien busque señorearla, debe ser exigente en grado sumo, en materia de rigor expositivo y de precisión conceptual; la intuición que, aún con sus peligros tanto ayuda al estudiante de otras provincias del conocimiento, poco tiene que ver con ella, si no es de manera accidental.

En cambio, la matemática aplicada, vale decir, la que se enseña en las carreras técnicas, es una ciencia auxiliar, forma parte de la propedéutica de cada rama y como tal, ha de exponerse con sentido pragmático. Allí el rigor debe estar prescrito cuando quiera que el pretender exigirlo conduzca al fastidio o a la repulsa del estudiante promedio, poco adicto, a lucubraciones demasiado sutiles y, en cambio, darse amplia cabida al proceso intuitivo como valioso expediente de comprensión, con el cual se aligeran las demostraciones y se ayuda a despertar la curiosidad humana por conocer algo más.

La identidad que, para muchos, existe entre ambas matemáticas se origina tal vez en el retardo con que advino, apenas en el siglo pasado, el proceso axiomático. No hay que olvidar cuántos intentos se hicieron, y por gente muy valiosa, para tratar de probar el "postulado de Euclides" de la geometría clásica, antes que alguien se diera clara cuenta de su indemostrabilidad, con lo cual se abrió paso a las geometrías no euclídeas de Bolyai, Lobatchewski y Riemann. Es también sabido que la matemática occidental latina, si así puede llamársela, tuvo su desarrollo, más que en las aulas universitarias, en recintos privados o cenáculos de amigos, gracias a la afición de espíritus selectos que, especialmente dotados para las ciencias exactas, se comunicaban unos a otros sus investigaciones o hallazgos provenientes, muchas veces, del planteamiento de problemas curiosos entretenidos. Son, al efecto, muy aleccionadoras las consecuencias derivadas de la correspondencia epistolar y de los desafíos matemáticos resultantes de ella, entre Cardano, Tartaglia, del Ferro y del Fiore, en el siglo XVI, en razón de los cual los historiadores les disciernen a los dos primeros, "ex-aequo", la paternidad de la fórmula resolutiva para la ecuación algebraica de tercer grado, así como de la mas famosa comunicación entre Newton y Leibniz durante el siglo XVII, verdaderos creadores, en la misma condición de igualdad de los italianos, del cálculo infinitésimo; y cómo olvidar a Euler, quien dio lecciones de Física a la princesa de Anhalt-Dessau, sobrina del rey de Prusia, acudiendo para ello a la fórmula epistolar, que luego se hizo pública en una preciosa obrita, bajo el título de "Cartas a una princesa de Alemania", así como a la familia Bernoulli, que a la par de la familia Bach en la música, esplendió en todas las ramas de la matemática, con originalidad y maestría sumas. Todos ellos, con sus problemas de tipo recreativo, hoy tan en boga en obras de divulgación a las cuales no han vacilado en vincularse maestros de la jerarquía de Klein, Courant, Rademacher, Toeplitz y Pedoe, dieron origen a diversas ramas de la matemática, como la teoría de ecuaciones algebraicas, el cálculo de variaciones, etc.

Hubo que esperar hasta Boole, Frege, Cantor, Hilbert y otros no menos eminentes, para que el desarrollo de los principios de la lógica matemática diera a la ciencia de Pitágoras lo que, en cierta manera, puede calificarse de personería jurídica, mediante la cual se instaló como entidad independiente, capaz de bastarse así misma, con sentido autárquico. No descarto que esta afirmación parezca exagerada; basta recordar, al efecto, que hay autores para quienes la matemática constituye apenas un capítulo, el primero, de la física o que juzgan que las dos matemáticas de que hablé al principio son, para bien o para mal, totalmente independientes. El tema es de por sí cautivante, pero a más de que se sale de los límites propios de esta apresurada charla, excede la capacidad analítica de quien habla.

La distinción entre matemática pura y aplicada no es, en este caso, un tema meramente académico, especulativo; se hace para concluir que, a fortiori, los métodos por seguir en ambos casos no han de ser coincidentes; en lo que respecta a la segunda de ellas, si bien es cierto que tiene un cierto carácter formativo (desarrollo de cualidades analíticas y de orden, práctica sistemática del raciocinio) su finalidad última es utilitaria; luego en la exposición de cada tema conviene seguir el camino más expedito, sacrificar el rigor a la comprensión y hacer énfasis en lo intuitivo como recurso que vuelve asimilables conceptos abstrusos, aún a trueque de la precisión axiológica. Soy el primero en confesarme reo de lo que recomiendo; en efecto, hasta no hace mucho, por ejemplo, desarrollaba el capítulo sobre límites, exponiendo el concepto fundamental, cuya aprehensión intuitiva es relativamente fácil, mediante la definición topológica y atiborraba a los alumnos con las demostraciones, más o menos estrictas, de las propiedades, de tal manera que, al llegar ellos a la parte de aplicación práctica estaban por rendirse y declarar su incompetencia para manejar las nociones vistas. Esos ε y δ de la definición, cuya dependencia no puede someterse a pauta sino que, como anguilas, se escapan por entre los huecos de toda red algorítmica!

Con razón, el profesor A. W. Goodman de la Universidad de South Florida, en su obra "Analityc Geometry and the Calculus" escribe, con humor muy sajón, al tratar sobre las propiedades de los límites, lo siguiente: "Qué decir sobre las demostraciones de estos cinco teoremas? Ellas se deducen de la definición I (la topológica que mencioné atrás) pero son algo sofisticadas. Como en el caso de la música de Bach o de las aceitunas negras, se debe primero desarrollar el gusto por esta clase de demostraciones, a fin de gozarlas realmente. Así que pedimos al estudiante diferir las demostraciones para más tarde (y en efecto, el autor las coloca en el tercer apéndice de su libro), ya que cada uno de los teoremas es de por sí obvio, una vez que se hace claro su significado".

Dentro de la pauta, ya recomendada, de simplificación, tampoco parece muy pertinente insistir en ciertos teoremas de existencia (de la integral definida, de la solución de una ecuación diferencia, etc.) que si para el matemático son imprescindibles y a veces fuente de íntimo regocijo espiritual, el estudiante ni siquiera ha tenido el pálpito de que existan y menos que no pueda pasarse sin ellos.

Para cerrar este tema, recurro de nuevo a la autoridad del profesor Goodman, cuyas son las siguientes palabras, pertenecientes al "prefacio para el maestro" de su libro ya citado: "Los textos recientes en materia de cálculo tienen generalmente, tres características comunes:

a)La inclusión de la geometría analítica como parte integrada del curso.

b)El uso de vectores.

c)La introducción de un mayor rigor.

Hay, creo, buenas razones en apoyo de los puntos a) y b) y puesto que éstos se hallan ahora de moda, no hay necesidad de repetir aquí los argumentos en su favor... Pero el item c) es algo diferente. Me parece que un libro de cálculo realmente riguroso debería comenzar con los axiomas de la teoría de conjuntos, seguir con los axiomas de Peano y luego reproducir la mayor parte de la gran obra Fundamentos de Análisis de Landau. Después de esta preparación, la clase (si aún hubieran quedado en ella alumnos) no tendría dificultad en seguir las demostraciones requeridas por el cálculo. Puesto que una presentación completamente rigurosa de éste no es obviamente práctica ni deseable, la cuestión central radica en determinar qué problemas deben demostrarse y cuáles dejarse a la intuición del alumno...

No he tratado de fomentar una actitud adecuada hacia el rigor, formulando claramente definiciones y teoremas. En conexión con ésto sostengo que no se debe tratar de presentar todas las hipótesis en un teorema, puesto que así su formulación puede alargarse tanto que se haga incomprensible para el estudiante promedio. Ciertas hipótesis son tácitas, tanto para el autor como para el lector, y pueden en gracia de la brevedad, omitirse. Como ilustración de los problemas implicados, considérese el siguiente:

Teorema B (blando): Si $\mathbf{y = f(u)}$ y $\mathbf{u = g(x)}$, entonces la derivada de la función compuesta $\mathbf{y = f(g(x))}$ está dada por:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

He aquí un enunciado breve, y simple que el estudiante promedio está en razonable probabilidad de entender. Veamos, ahora, el mismo teorema, cuando se enuncia de manera rigurosa:

Teorema D (duro): Sea **f** y **g** dos funciones reales de variable real y supóngase que el recorrido de **g** es un subconjunto del dominio de **f**.

Sea **h**= **fg** la función compuesta definida sobre el dominio de **g** al hacer **h**(**x**)= **f** (**g**(**x**)) para cada **x** en el dominio de **g**. Si $\mathbf{x_o}$ es un punto interior de un intervalo contenido en el dominio de **g**, **g** una función derivable en $\mathbf{x_o}$ y **f** una función derivable en $\mathbf{u_o} = \mathbf{g}(\mathbf{x_o})$, entonces **h** es una función derivable en $\mathbf{x_o}$ y además la derivada está dada por la fórmula:

$$h(x_o) = f'(u_o)\ u'(x_o)$$

No hay duda que **D** es el enunciado correcto y que **B** está lleno de vacíos. Sin embargo, el estudiante promedio, que puede aprender y usar **B**, cuando se le presenta **D**, terminará por dormirse o por ignorarlo completamente. La presentación de **D** en vez de **B** es, en realidad, perjudicial puesto que sirve para repeler muchos estudiantes inicialmente atraídos por las matemáticas y que habrían podido resultar buenos técnicos o profesores (si no pensadores originales) de habérseles dado una razonable oportunidad de desarrollo".

Es claro que caben varios teoremas de un tercer tipo **C** (medio blando o medio duro) pero, fuera de que no ofrecen mayores ventajas sobre los de los tipos **B** y **D**, tienen muchos de sus inconvenientes.

La diferencia entre las matemáticas a que me referí inicialmente no radica sólo en el sacrificio del rigor para beneficio de la práctica, sino en las materias mismas del pénsum, las que, además, presentan cambios, no del todo adjetivos, de una rama técnica a otra; así fuera de un grupo común de cursos, donde hay diferencia de intensidad y de contenido, se presentan otras de carácter específico; tal es el caso en las ciencias económicas, que exigen muchas veces una preparación especial sobre diferencias finitas y matrices, al paso que la ingeniería, en sus diversas ramas, impone hoy el dictado de por lo menos un semestre de álgebra lineal.

Si quisiera concretar en una sola materia la tipicidad de los estudios de ciencias exactas, me atrevería a asignar tal papel a la topología, en cuanto a la carrera del matemático; pasando de ésta a los estudios técnicos, mis preferencias irían por el cálculo numérico, como materia distintiva. Poco importa que no figure con este nombre en todos los programas universitarios, pues lo está en algunos de ellos y en los demás aparece mimetizado dentro del contexto de los cursos de cálculo. Por qué se podrá preguntar, tal preferencia? Sencillamente, porque el cálculo numérico resume en sí las finalidades de la matemática práctica, como sistema de valoración cuantitativa de los fenómenos de la vida diaria. Esa es la razón para que se propugne por su existencia independiente, o, si ello no es posible, porque sus principales temas (métodos de aproximación de las diferencias finitas, fórmulas de Poisson, Poncelet y Chebishev para el cálculo aproximado de integrales definidas, aproximación de raíces inconmensurables de las ecuaciones algebraicas, etc.) se mantengan como obligatorios dentro del respectivo programa.

La matemática aplicada exige, como herramienta que es, que se la manipule bien y esto sólo se consigue a base de un entrenamiento intenso; el estudiante que sólo se limite a aprender la escala y muy dosificada teoría en cada curso, sacará poco provecho de su esfuerzo si no lo complementa con la resolución de gran número de ejercicios, debidamente graduados, para llegar a poseer las nociones fundamentales de función (su dominio y recorrido), límite, derivada, integral y demás que de éstas se desprenden y para saberlas utilizar cada vez que lo necesite. Las reflexiones precedentes conducen a la recomendación de que se persista en mantener, al lado de cada curso teórico, un cierto número de horas adicionales, para la práctica de ejercicios dirigidos, bien por el profesor de la materia, bien por monitores adiestrados al efecto.

Y ya que toco con la hermeneútica para mejorar el rendimiento escolar, creo oportuno traer a colación el supuesto tema de esta charla, respecto de los yerros o equivocaciones de los alumnos, aclarando de paso que más que de su propagación, fenómeno natural dentro del crecimiento de la población estudiantil, deseo tratar de su persistencia al través del tiempo. Todos los aquí presentes hemos sido, cual más, cual menos, víctimas de ellos; hemos demostrado de su existencia, exagerándolos muchas veces, para ver de erradicarlos y, sin embargo, poco o ninguno es el fruto obtenido con nuestros empeños. Aclaro que entre esos yerros sólo tomo en cuenta los conceptuales y no los de simple manipulación, debido muchas veces a descuido o fatiga fácilmente explicables.

Volviendo a los susodichos yerros, a que se deberá que subsistan después de tanto tiempo? La respuesta no es tan simple como pudiera pensarse porque hay diversas razones, igualmente plausibles, en que fundamentarla. Entre ellas: defectos metodológicos de la enseñanza, inmadurez intelectiva del educando medio, mal empleo de la analogía y la generalización, impreparación del maestro.

Sobre el proceso de la metodología hablaré más tarde si, como se dice en la jerga taurina, el tiempo lo permite, a propósito de la reforma que en tal aspecto de la enseñanza se viene aplicando en diferentes países, tanto para las ciencias exactas como para otras disciplinas.

El profesor, por su parte, debe insistir en su tarea correctiva cada vez que haya lugar a ella, mediante el uso de ejemplos aleccionadores, destinados a destacar los exabruptos a que es factible llegar en cada caso.

A manera de ilustración de lo que acabo de decir, copio enseguida una lista de yerros comunes, naturalmente incompleta, y por fuera de la cual es posible que haya algunos de marca mayor:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm b^2$ y, en general:
$(a \pm b)^n = a^n \pm b^n$

$\sqrt{a \pm b} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ y, en general
$\sqrt{a^n \pm b^n} = \sqrt{a^n} \pm \sqrt{b^n}$

$$\frac{ab+c}{ad}=\frac{b+c}{d}$$

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b+c}=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$$

$$\log(a \pm b) = \log a \pm \log b$$

$$\log(a \bullet b) = (\log a) \bullet (\log b)$$

$$\log\frac{a}{b}=\frac{\log a}{\log b}$$

Sen (x ± y) = sen x ± sen y (y fórmulas similares para las demás funciones trigonométricas).

det. (A + B) = det. A + det B.

Se trata de identidades aparentes, cuyas condiciones de existencia supongo, para abreviar, cumplidas en este caso; en cuanto a las letras, son elementos del conjunto de los reales salvo en el último caso, en el que representan matrices cuadradas equidimensionales.

Tomemos p.e.., la expresión

$$\log(a+b) = \log a + \log b$$

Para hacer ver a los alumnos cuáles son las consecuencias de sostener una blasfemia matemática semejante, demos inicialmente a **a** y **b** el mismo valor **1**: entonces

$$\log 2 = \log(1+1) = \log 1 + \log 1 = 0$$

y siguiendo:

$$\log 3 = \log(2+1) = \log 2 + \log 1 = 0$$
$$\log(n+1) = \log n + \log 1 = 0$$

Consecuencia inmediata: el logaritmo de cualquier número positivo es **0**.

Si se trabaja con la fórmula

$$\log(a-b) = \log a - \log b,$$

los absurdos a que se llega no son menos flagrantes que los antedichos.

otro Ejemplo: $\frac{a}{b+c}=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$

Haciendo a = b = c = 1, se tiene:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=2$$

en seguida:

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=2+1=3$$

y más generalmente:

$$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{1}=n+1$$

En este último caso, la igualdad

$\frac{1}{n}=n$ no sólo se verifica,

dentro del conjunto de los naturales, para **n = 1** lo que podría llevar a un alumno tozudo pero recursivo a reafirmarse en su error, con una pretendida demostración por inducción completa, así:

Supóngase que

$$\frac{1}{n}=\underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\ \dots\ \frac{1}{1}}_{n\ veces}$$

La fórmula se verifica para

$$n=1:\quad \frac{1}{1}=\frac{1}{1}$$

y supuesto que se cumple para **n**, entonces:

$$\frac{1}{n+1}=(\underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\dots\frac{1}{1}}_{n\ veces})+1=n+1$$

La prueba es, pues, aparentemente completa; su falsedad radica en que estando implícita una suma, esta no puede tener sentido sino al menos cuando **n = 2**. Y, entonces, salta el gazapo!

La mayéutica es también un buen medio de hacer patentes los yerros conceptuales, a condición de que se utilice con habilidad y discreción para que sea el propio responsable del error quien descubra en dónde radica la esencia de su equivocación.

No son menores las dificultades con el cero como factor o divisor o frente al símbolo esotérico del infinito. Expresiones como:

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 0.0;\ 0.\infty;\ \infty.\infty;\ \frac{a}{0};\ \frac{0}{a}\ y\ \frac{a}{\infty}$$

(para $a \neq 0$)

y otras similares conducen casi siempre a respuestas erróneas o a dubitaciones que acusan inseguridad o desconcierto. Como en el caso de la lista copiada anteriormente, es recomendable insistir aquí en la clarificación de conceptos, con el cuidado que los símbolos **0** e **∞** comportan, y en la ilustración de cada caso con ejercicios debidamente seleccionados.

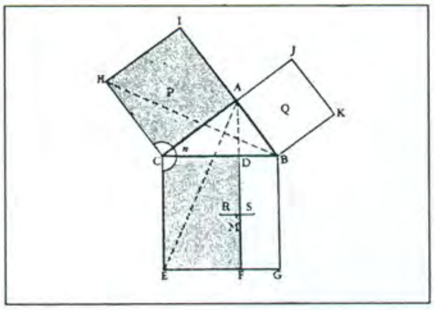
En guarda contra las asechanzas que suelen jugarnos la intuición y el proceso analógico conviene también acudir a ejemplos como estos dos, de indudable pertinencia, que debo al profesor Eduardo Caro:

Podemos tener al cubo como el cuerpo que, en el espacio de tres dimensiones, es el análogo o correspondiente del cuadrado, en forma que muchas de las propiedades de éste se pueden trasladar a aquél. Veámoslo: los lados del cuadrado son iguales y las caras del cubo también; los lados del cuadrado se cortan en ángulo recto, así como las caras del cubo; aquel es un polígono regular y éste un poliedro también regular; las diagonales del cuadrado así como las del cubo son iguales. Entonces, si además, las diagonales del cuadrado se cortan en ángulo recto, es natural que, llevado por fuerza de la analogía de todos los casos precedentes, el estudiante concluya que otro tanto ocurra con las diagonales del cubo, con lo que incurre en una afirmación errónea.

El triángulo es una figura plana formada por tres rectas no concurrentes en un mismo punto. Su análogo, en el espacio de tres dimensiones, es la figura formada por cuatro planos sin ningún punto común a todos, ésto es, el tetraedro. Puesto que éste tiene cuatro alturas, su analogía con el triángulo sugiere la pregunta obvia; esas alturas, concurrirán en un punto, como sí lo hacen las alturas del triángulo? La respuesta no es simple, ya que hay tetraedros en donde se cumple la propiedad y otros en donde es cierto, apenas, parcialmente. Si cada una de las aristas del tetraedro, forma ángulo recto con las opuestas (tetraedro ortocéntrico) las alturas concurren en un punto e inversamente (un ejemplo de tetraedro ortocéntrico es el trirrectángulo y este tipo posee varias propiedades más, análogas a las del triángulo). Un segundo tipo de tetraedro es el que tiene dos aristas mutuamente perpendiculares; entonces las alturas se intersectan dos a dos. Por último, si ninguna de las aristas del tetraedro es perpendicular a su opuesta, las tres alturas sí se cruzarán y carecen, por tanto, de puntos en común; sin embargo, gozan de la propiedad de que cualquier recta que corta a tres de ellas corta necesariamente a la cuarta; en otras palabras las cuatro alturas del tetraedro forman un grupo hiperbólico. Esta propiedad enunciada por primera vez a principios del siglo pasado, no tiene análogo en el triángulo.

También hay que precaver al estudiante contra las pretendidas generalizaciones provenientes del apresuramiento o de resultados falsamente interpretados. El teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo provee muchos casos de estos debidos al malhadado ejemplo que atribuye a los lados correspondientes del triángulo los valores numéricos 3, 4 y 5; el estudiante descuidado e irreflexivo se hace a la cómoda creencia de que siempre que disponga de tres números enteros, con tal de que sean consecutivos, podrá asignarles el carácter de lados de un triángulo rectángulo; se comprende fácilmente por qué ocurren, entonces, demostraciones del teorema como las dos que, para solaz de uds. repito en seguida:

i) Sea ABC un triángulo rectán-

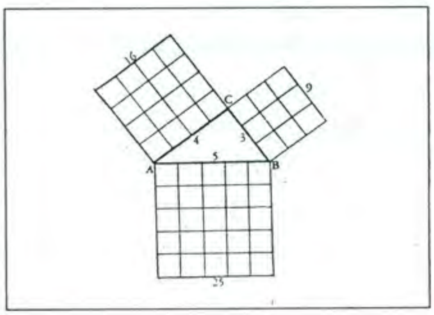


gulo, llamamos I el cuadrado construído sobre el cateto mismo; II el construído sobre el otro cateto y III el constituído sobre la hipotenusa.

Evidentemente se puede escribir que I + II = III.

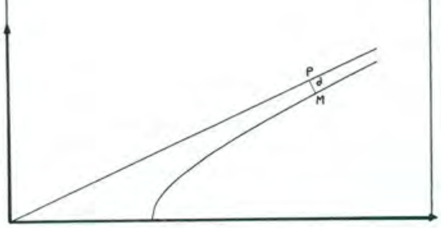
Parece imposible encontrar una demostración más simple que ésta.

ii) Dado un triángulo supuesto rectángulo, de catetos iguales a 3 e hipotenusa igual a 4, se construyen



sobre los lados sus respectivos cuadrados, divididos como se indica en la figura.Inmediatamente, se ve que el número total de figuras iguales que resultan en los dos cuadrados superiores (12) es idéntico al de las figuras que aparecen en el cuadrado construído sobre la hipotenusa. Luego el teorema de Pitágoras es cierto.

Para terminar con este asunto de la metodología, resulta una buena práctica heurística darle al alumno



oportunidad de que ejercite su propio ingenio, presentando algunos puntos teóricos en forma, si no original, al menos diferente del que usualmente acostumbran a seguir los textos de estudio. Valga el siguiente ejemplo: sobre la base de la definición de recta asintótica a una curva, no paralela al eje **OY**, pueden deducirse las condiciones para determinar las presentes en una función de la forma **y = f (x).**

La distancia d de un punto **M (x, y)** a una recta **Y = aX + b** está dada por la fórmula:

$$MP = d = \pm \frac{y - ax - b}{1 + a^2}$$

en donde se dispone del doble signo para que siempre $d > 0$

La recta en mención es asintótica a la curva si $d \to 0$, cuando $x \to \infty$; esto quiere decir que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y - ax - b}{\sqrt{1 + a^2}} = 0$$

y puesto que $\sqrt{1 + a^2}$, es finito también

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y - ax - b}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{y}{x} - a - \frac{b}{x}\right) =$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{y}{x} - a\right) = 0$$

luego $a = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$

Además

$b = \lim_{x \to \infty} (y - ax) = \lim_{x \to \infty} [(f(x) - ax)]$

De esta manera se determinan **a** y **b** para que **y = aX + b** sea asintótica a la curva **y = f(x)**.

Si $y \to \infty$ con **x**, entonces a está dado por el verdades valor de un fracción de la forma $\frac{\infty}{\infty}$

y **b** por el de una diferencia de la forma $\infty - \infty$

si no ocurre que $y \to \infty$ con **x**, sale que **a = 0**, es decir, que el eje **x** es una asintóta de la curva **y = f(x)**.

Las asíntotas paralelas al eje **y** que este procedimiento deja por fuera, existirán si hay valores finitos **c** de **x** para los cuales **y = f(x)** presenta una discontinuidad infinita.

He dejado para lo último y hasta donde me de lugar la dictadura de cronos, hacer referencia a la nueva metodología sobre enseñanza de la matemática. El tema, de por sí capital, viene a propósito de un libro publicado a fines del último año en los Estados Unidos por el profesor Morris Kline del Courant Institute of Mathematical Sciences de la Universidad de Nueva York. El solo título de la obra "Why Johnny Can't Add. The Failure of the New Math" manifiesta bien a las claras el designio de su autor: hacer una requisitoria, en términos enérgicos, demoledores, contra la enseñanza actual de las ciencias exactas en los niveles elemental y medio de las escuelas estadinenses. El ilustre profesor comienza por reconocer paladinamente que la docencia tradicional adolecía de graves defectos de forma y contenido, que imponían un correctivo inmediato; al respecto dice, entre otras cosas, que: "que se les enseña (alude a los alumnos) docenas de procesos; factorización, resolución de ecuaciones de una y dos incógnitas, uso de exponentes, adición, sustracción, multiplicación y división de polinomios y operaciones en números negativos y radicales como 3. En cada caso se les pide imitar lo que el maestro y el texto les muestra cómo hacer. Aquí los estudiantes se enfrentan a una atolondradora variedad de procesos que ellos repiten de memoria, a fin de dominarlos. La enseñanza es, casi simple, pura memorización.

Es también cierto que varios procesos carecen de conexión, al menos que se presenten usualmente; raras veces tienen que ver entre sí. No obstante que todos deben contribuir a la capacitación estudiantil para ejecutar operaciones algebraicas en matemáticas avanzadas, no están interrelacionados, en cuanto el estudiante puede juzgar. Son como páginas rotas de una centena de libros diferentes, ninguna de las cuales se vincula a la vida, significado y espíritu de las matemáticas. Esta presentación del álgebra comienza en cualquier parte y termina en cualquier parte.

Después de un año de este trabajo en álgebra, el currículo tradicional se traslada a la geometría euclídea. Aquí, repentinamente, la matemática se vuelve deductiva. Esto es, comienza por definiciones de las figuras geométricas y por axiomas o aserciones básicas sobre ellas que se presume ser "obviamente verdaderas". Entonces, se demuestran teoremas, aplicando el razonamiento deductivo a los axiomas; unos teoremas siguen a otros en secuencia lógica, esto es, las pruebas de los posteriores dependen de las conclusiones ya establecidas en los iniciales. El cambio repentino del álgebra mecánica a la geometría deductiva molesta ciertamente a muchos estudiantes que en su educación precedente no han aprendido lo que es una "prueba" y deben ahora dominar este concepto en adición al aprendizaje de la materia propiamente dicha....

Otros problemas perturban a los estudiantes, en general. Puesto que el álgebra es también parte de la matemática, porque se requiere la prueba deductiva en geometría y no en aquella otra? Este conflicto se agudiza más cuando los alumnos cursan el álgebra intermedia, usualmente después del curso de geometría, puesto que entonces se abandona, de nuevo, la prueba en favor de las técnicas...

Más allá de los pocos defectos que ya hemos descrito, el currículo tradicional presenta el más grave que puede achacarse a cualquiera: su falta de motivación. Las ciencias exactas tienen, para usar las palabras del famoso matemático del siglo XX, Hermann Weyl, la calidad inhumana de la luz estérea: brillante y fina pero fría. Es también abstracta; se relaciona con conceptos mentales, aunque algunos, como los de la geometría, puedan visualizarse. A cuenta de ambas características: la frialdad y la abstracción, muy pocos estudiantes se sienten atraídos por el tema...

El hecho es que no se ofrece motivación alguna para el estudio de las matemáticas en el currículo tradicional. Los estudiantes se someten a él, para cumplir con un requerimiento. La motivación significa más que un estímulo psicológico: cuando es genuina, provee también una percepción íntima del verdadero significado de las matemáticas. Una gran porción de éstas, sobre todo en el nivel elemental, ha sido sugerida directamente por situaciones y problemas reales.

La fórmula escueta $s = 16t^2$ adquiere significado cuando se aprende que ella relaciona la distancia recorrida y el tiempo de recorrido de un objeto que cae; la elipse deja de ser una curva más al saberse que corresponde a la trayectoria de un planeta alrededor del sol. Además, las preguntas que ocurre a hacer acerca de las fórmulas y de la curva resultan plenamente significativas porque tienen que ver con situaciones físicas. Los significados físicos dan también, en muchos casos, al menos, poder de pensamiento sobre problemas matemáticos, a causa de que la matemática no es más que una representación de la física y un medio de resolver problemas físicos y de otra índole....

Es claro que el currículo adolece de numerosos defectos. La confianza en la memorización de procesos y de pruebas, los tratamientos disparejos del álgebra y de la geometría, deficiencias menores de lógica, la conservación de unos pocos temas desuetos y la ausencia de cualquier motivación o requerimiento explican por que los jóvenes no gustan de la materia y, por tanto, no la hacen bien. La antipatía se intensifica y sus dificultades de comprensión se mezclan con la exigencia de que lean textos de estudio, pobremente escritos e ideados con criterio comercial".

Este exordio, que he expurgado por obvias razones, sirve para mostrar en primer término, como el profesor Kline era partidario de modificar el currículo de matemática vigente hasta hace poco en los Estados Unidos, y para encomiar, en seguida, la honradez con que procede al manifestar su desencanto con la reforma sustitutiva, contra la cual arremete con todo su bagaje dialéctico, y el apoyo que le prestan colegas suyos de la categoría de Bell, Birkoff, Courant, Lewy, Kaplan, Nehary, Pólya, Sokolnikoff y Well. Según calificativo tomado en préstamo a los clásicos, Kleine deja al nuevo currículo "como no digan dueñas". Júzguenlo ustedes mismos, al través de los siguientes párrafos, que me he permitido seleccionar y al lado de los cuales merecen colocarse otros no menores fuertes.

"Es altamente significativo que los fundamentos lógicos del sistema numérico, el álgebra y el análisis (Cálculo y extensiones) no se erigieron hasta la última parte del siglo XIX. En otras palabras, durante los siglos en que se constituyeron las principales ramas de la Matemática, no hubo desarrollo lógico para la mayor parte de ella. Evidentemente, las instituciones de los grandes hombres son más poderosas que su lógica.

Que puede inferirse de esta historia? Parece claro que los conceptos que tienen el significado más intuitivo: números enteros, fracciones, conceptos geométricos, se aceptaron y utilizaron primero. Los menos intuitivos: números irracionales, negativos y complejos, empleo de letras como coefientes generales y conceptos de cálculo requirieron unos y otros de muchos siglos para su creación o aceptación. Además cuando se les aceptó no fue la lógica, la que indujo a los matemáticos a hacerlo sino los argumentos por analogía, el significado físico de algunos de tales conceptos y la obtención de resultados científicos correctos.

Presentar las matemáticas como antigeneradoras no solo es una negación de la historia sino ocul ar sus conexiones vitales con otras ramas del conocimiento. Desde un punto de vista pedagógico, este acceso es más desafortunado porque desprecia la oportunidad y la necesidad de dar motivación y significado a las matemáticas. Hemos ya notado que el defecto más grave del currículo tradicional es su falta de motivación. En vez de remediar este serísimo defecto, el currículo moderno lo ha agravado. No se puede motiva a los jóvenes a aprender matemáticas con más matemáticas. Los estudiantes que no estén interesados en resolver $x + 3 = 4$ ciertamente tampoco lo estarán en resolver $x + 4 = 3$.

Por su aislacionismo las matemáticas han llegado a ser insubstanciales y desapacibles. Es como si la materia se enseñara en un cuarto provisto de espejos en la pared, en vez de ventanas abiertas al mundo exterior. Los líderes de la matemática moderna han supuesto que ella, tomada en sí misma, ejerce atracción sobre los jóvenes, pero esto difícilmente puede aceptarse como cierto. Al estudiante las matemáticas no se le presentan sino como un grande e intrincado rompecabezas. A causa de su carácter abstracto, las ciencias exactas no constituyen un interés natural del hombre. El único hecho de que algunas pocas civilizaciones entre ciento hayan dedicado algún tiempo y esfuerzo al tema, muestra cuán desnaturalizado es.

Los profesores hablan a menudo de comunicar a sus alumnos el sentimiento de poder de las matemáticas y también, de hacerlo mediante la exhibición de la estructura y orden que penetran cada punto del tema. No es claro ver cómo estos rasgos evidencian al poder de las matemáticas. Para demostrarlo se deben usar en situaciones reales. Es, en esos momentos, cuando se aplica su poder y los estudiantes llegan a apreciarlo.

Así, el meollo de la censura de la enseñanza de la estructura matemática a los jóvenes, fuera de que sea importante o no, radica en que el tema no puede entonces tener significación. Y esto implica que no debe enseñarse a dicho nivel.

La teoría de conjuntos es, para las matemáticas elementales, un formalismo hueco mediante el cual se sobrecargan las ideas que pueden entenderse más fácilmente de manera intuitiva. La intención que persigue es casi ridícula y una parodia pedagógica. La teoría de conjuntos no ha demostrado que sea el elixir para la pedagogía matemática.

El punto verdadero de una formulación abstracta es que unifica y revela propiedades comunes a ramas concretas y familiares de las matemáticas. Por tanto, la abstracción no es el primer período sino el último, de un desarrollo matemático. Puede dar penetración pero solo en estructuras concretas bien aprendidas. Sin mucho conocimiento previo de casos concretos, los conceptos abstractos permanecen vacíos, hijos arbitrarios de la fantasía matemática. Enfrentar a los jóvenes con abstracciones que sobrepasan su nivel de madurez es crear perplejidad y repulsión en vez de incremento de conocimientos. En resumen: Los conceptos altamente abstractos no pueden ser materia de explotación en un nivel elemental.

Hay otra objeción contra la enseñanza de las estructuras abstractas. Es cierto que los números racionales, los reales y los complejos tienen las propiedades de un campo. Esto es:la suma, el producto, la diferencia y el cociente de dos números racionales cualesquiera es un número racional y lo mismo ocurre para los reales y los complejos. Se podría por tanto, argüir que los estudiantes tienen así tres ejemplos concretos de campo. Cabrá, pues, enseñar tempranamente este último concepto? La respuesta es que aún no, puesto que las propiedades de campo son las comunes a todos estos sistemas numéricos, así que automáticamente borran sus rasgos distintivos ... El estudiante que conoce perfectamente las propiedades de un campo no necesariamente puede verificar las vueltas que le dé el abacero del barrio ni mucho menos encontrar el saldo de su chequera. Mantengamos en mente que un concepto matemático es tanto más horro de significado cuánto más general. Puesto de otra manera: el campo no explica los tipos de números y sus operaciones; en realidad, es justamente al contrario. Una buena comprensión de los diferentes sistemas numéricos explica el concepto de campo. Por tanto el concepto familiar de que resulta eficiente enseñar temprano el concepto abstracto puesto que comprende, al mismo tiempo, muchos casos concretos, es infecundo. En cuanto concierne a la eficiencia, el tiempo perdido es el que se gasta en la enseñanza del concepto abstracto. Cuando se tiene en cuenta que tal vez el 50% de los estudiantes que entran a un colegio no pueden sumar ni multiplicar fracciones, especialmente si se expresan en forma literal, se puede comprender muy bien en dónde debe ponerse el énfasis. Psicológicamente, la enseñanza de la abstracción en primer término es totalmente errónea. En realidad, la comprensión completa de lo concreto debe preceder a lo abstracto. Los conceptos abstractos carecen de sentido a menos que se tenga en mente varias y diversas interpretaciones. Las abstracciones primitivas caen en oídos sordos.

Quizá la crítica decisiva al programa de matemáticas modernas haya provenido inconscientemente de un profesor muy adicto a él, al pretender que su observación siguiente contenía sólo palabras de elogio. "Si ellos (los estudiantes) han de fracasar con las matemáticas, es preferible que fracasen con buenas matemáticas". Y hasta aquí el profesor Kline.

Entre paréntesis, algún ingenio criollo podría vertir el último comentario en términos de filosofía parda diciendo que equivale a que si el enfermo ha de morir, es preferible que muera de una enfermedad distinguida.

Ignoro cómo se viene desarrollando en Colombia la nueva metodología de la enseñanza matemática en primaria y bachillerato, pero no sería raro que, por nuestro afán de copiarlo todo, se asemeje a la estadinense y acuse, por tanto, algunos de los rasgos desfavorables objeto de la acerba censura de nuestro colega de cátedra. Entonces, así como les ocurre a los Johnnys del tío Sam no pasará mucho tiempo sin que los padres de nuestros Juanitos se tengan que privar de mandarlos a la tienda de la esquina a realizar alguna compra por miedo de que se dejen engañar en el recibo de las vueltas. Qué triste perspectiva para quienes, en cambio, se saben al dedillo todas las propiedades de que gozan las operaciones de los diferentes tipos de números.

Quiero adelantarme a cualquier crítica que sobre improcedencia pueda hacerse a la última parte de esta charla, diciendo que las universidades no pueden ser indiferentes a la manera como se enseñen las matemáticas en los niveles inferior y medio, entre otras cosas porque de ella depende, al menos en parte, la buena suerte de muchos futuros universitarios y porque cae dentro de su actividad investigativa indagar sobre las deficiencias educativas del colombiano de hoy y proponer remedios que tiendan a suprimirlas, en bien de la comunidad. Con actividades como las que apenas dejo esbozadas, se atiende, siquiera en parte, el clamor de quienes piden que nuestras universidades sean, antes que el reflejo del país, sus motores y guías en los momentos actuales. (Bogotá, Julio/1974)

Repavimentación con Geotextiles en el Par Vial de la Ciudad de Cali

Por : Ing. Jorge Paz
Secretaría de Obras Públicas de Cali

Con el fin de asegurar un desplazamiento rápido y cómodo de los pasajeros del sur al norte y viceversa, sin pasar por el centro de la ciudad, el municipio de Cali adecuó un corredor paralelo a la vía férrea, formado por las calle 23, 25 y 26, denominado PAR VIAL.

La calle 26 entre carreras 23 a 50 por diseño del par víal, cambió de sentido convirtiéndose en la principal arteria de tráfico del sur al norte de la ciudad.

PATOLOGIA DEL PAVIMENTO. El pavimento existente en el sector a repavimentar es de tipo rígido, construído con diferentes especificaciones y en distintas épocas, pudiéndose agrupar en tres tramos:

1. carreras 23 a 26; 2. Carreras 26 a 39; 3. Carreras 39 a 50.

El primer tramo contruído aproximadamente hace 15 años presentaba desgaste superficial, con muy pocas fisuras de borde y sin ningún movimiento relativo entre losas. La estructura del pavimento del sector está conformada por un relleno granular de 30 a 40 centímetros, una base granular de 15 centímetros y una losa de 15 centímetros. La subrasante corresponde a un limo arcilloso con índice de plasticidad entre 20 y 30%.

El segundo tramo construído hace 11 años, presentaba agrietamientos y desprendimientos del concreto en un 10% del área pavimentada, principalmente en las losas centrales.

Además existían movimientos relativos entre losas, midiéndose en 1 cm. su mayor diferencia. La subrasante en este tramo está compuesta por una arcilla de alta plasticidad con un índice de 40 a 50%. La estructura del pavimento está conformada por un relleno granular de 30 centímetros, una base granular de 15 centímetros y una losa de 15 centímetros. El drenaje de este tramo es inadecuado, pues sólo tiene 3 sumideros en una longitud de 600 metros y están concentrados en los últimos 100 metros.

El tercer tramo, construído hace 4 años condujo al departamento de valorización a contratar un estudio de patología, puesto que las losas en algunos sectores se fracturaron totalmente. El estudio mostró la presencia de una subrasante bastante plástica con espesores de mejoramiento mecánico (cambio de suelo) muy diversos, entre 40 y 100 centímetros; una base granular y una losa de 15 centímetros cada una, y el relleno encontrado presentaba una plasticidad entre 15 y 25%.

Aunque se tenía un drenaje aceptable, la estructura fue insuficiente para el tráfico vehicular.

ALTERNATIVAS ANALIZADAS. Para la recuperación de los tres tramos se consideraron inicialmente las siguientes alternativas:

- Carpeta de concreto asfáltico tipo rodadura.
- Base estabilizada con asfalto y luego capa de rodadura.

Estas dos alternativas requerían de tratamientos previos en la estructura encontrada:

- Demolición de la losa en los sitios de gran fisuración y reemplazo por una carpeta de concreto asfáltico de 15 centímetros.
- Nivelación de todos los bordillos y la construcción de nuevos andenes.

Las divisiones de ingeniería de las dos entidades municipales que participaron en el proyecto acogieron la recomendación de repavimentar con Geotextiles no tejidos, obteniendo de ellos los siguientes beneficios:

- Retardar la aparición de las juntas y fisuras en la nueva capa.
- Impermeabilizar toda el área de calzada, pues los pavimentos construídos están sobre arcillas contracto-expansivas de críticas a muy críticas.
- Reducir el tiempo y costo de la obra.

CONSTRUCCION. Una vez definida la alternativa de recuperación con Geotextiles, el proceso de construcción fué el siguiente:

- Tratamiento de las juntas y fisuras, soplando con compresor y rellenado con asfalto AC 190.
- Colocación del imprimante bituminoso.
- Instalación del Geotextil sobre

la superficie imprimada, en todo el ancho de la calzada de 10 metros. En los sectores en donde el estado de las losas era bueno, sin desgastes, sin fisuras y sin movimientos relativos entre ellas, se colocaron franjas de 1 metro de anchas sobre las juntas.

- Por último se procedió a la colocación y compactación de la nueva capa asfáltica.

REPAVIMENTACION CON GEOTEXTILES

ANTECEDENTES. El mantenimiento y recuperación de pavimentos en mal estado representa grandes inversiones por parte del gobierno y normalmente causa traumatismo para los usuarios. La repavimentación con Geotextiles aumenta la vida util de las vías: optimizando así los recursos destinados a la inversión en infraestructura víal.

Al repavimentar utilizando Geotextiles, se aumenta la impermeabilidad y se retarda la aparición o calcado de las fisuras a la nueva capa. Al reducir de esta forma las variaciones del contenido de humedad en la estructura y subrasante, se minimizan las principales causas de falla en las vías.

El reflejo de las fisuras en un pavimento de concreto asfáltico ha sido objeto de estudio desde 1929, cuando en el estado norteamericano de Carolina del Sur, se realizaron repavimentaciones usando telas de algodón. Desafortunadamente la degradación de las fibras naturales no permitió un resultado satisfactorio.

Repavimentación con Geotextiles en la Av. Caracas en Santafé de Bogotá

A finales de la década de los 60, el Departamento de Transportes de California desarrolló un programa investigativo en la repavimentación de las vías interestatales. Se analizaron las siguientes alternativas para la recuperación y construcción de las vías:

- Mezlas asfálticas de granulometría abierta y baja concentración de liga entre agregados, usadas como estructuras de disipación o amortiguadoras de esfuerzos.

- Mezclas asfálticas de alta resistencia al corte para evitar la progresión de las fisuras.

- Mallas metálicas como refuerzo interno del concreto asfáltico para asumir tensión.

Las anteriores alternativas fueron de baja efectividad y excesivamente costosas.

Durante las siguientes dos décadas, no solamente el Departamento de Transportes de California sino los estados de Arizona, Florida, Dakota del Norte e instituciones como el Departamento de Transporte de los Estados Unidos y la Administración de Autopistas Federales, desarrollaron un programa de investigación sobre el uso de los Geotextiles en la repavimentación, obteniendo una alternativa más económica y confiable. A partir de estos resultados se utiliza el Geotextil en la repavimentación con concreto asfáltico como parte integral de la obra.

Para determinar las propiedades mecánicas e hidráulicas del Geotextil en la repavimentación, el Instituto del Asfalto a través de sus manuales, publicó en 1977 un documento titulado "Asphalt Overlays and Pavement Rehabilitation".

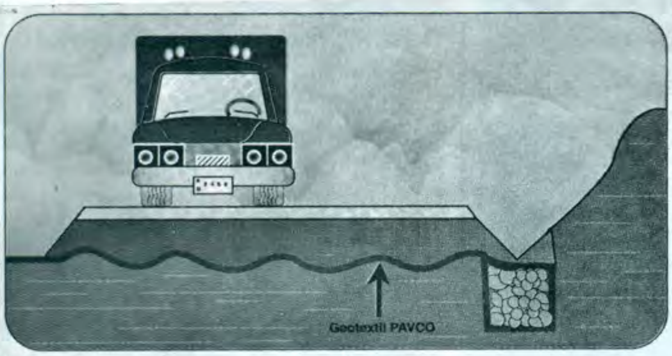
En Suramérica, Chile y Brasil van a la vanguardia en la repavimentación con Geotextiles. La reducción de costos, el incremento de la vida útil de las vías debido al retardo en la reflexión de grietas y a la impermeabilización de la estructura del pavimento; han sido los principales beneficios de esta nueva metodología.

Para obtener una repavimentación adecuada además del Geotextil, se deben tener en cuenta las características del pavimento existente, el tráfico vehicular, la influencia del clima, la forma como se lleve a cabo la liga entre la vieja capa y la nueva, la saturación del Geotextil con el imprimante y las características de la mezcla asfáltica.

TIPOS DE FISURAS EN PAVIMENTOS. En pavimentos se presentan fisuras primarias, secundarias y terciarias.

Fisuras Primarias: Generalmente son producidas por falta de capacidad portante de la subrasante o por contamiación de los materiales utilizados en la base o sub-base de la estructura del pavimento.

Estas causas se pueden prevenir utilizando un Geotextil colocado entre la subrasante y la estructura del pavimento, el cual desempeña funciones de separación y refuerzo.



Fisuras Secundarias: Son grietas verticales producidas generalmente por la fatiga acumulada debida a la flexión y al envejecimiento natural del asfalto por el intemperismo.

Estas fisuras incrementan la permeabilidad de la estructura del pavimento y reducen la resistencia al corte de la carpeta asfáltica produciendo huecos (potholes), que aumentan rápidamente su diámetro al paso del tráfico vehicular.

Fisuras Terciarias: Cuando se repavimenta sobre fisuras o juntas, éstas se calcan sobre la nueva capa, debido a las variaciones térmicas y a los esfuerzos generados por el tráfico.

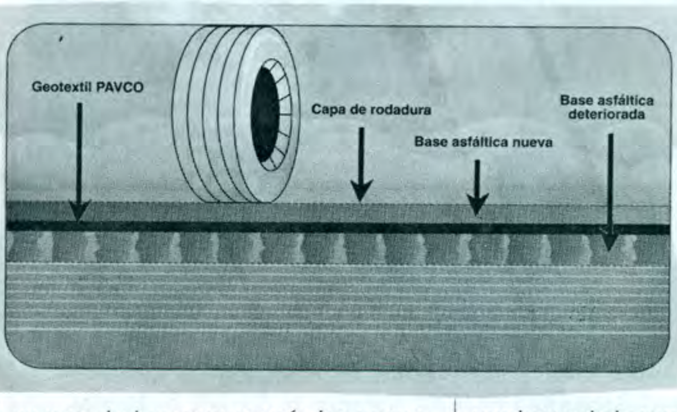
Según la experiencia, las fisuras terciarias se producen no solamente por el calcado sino también por el tipo de imprimante usado como liga entre las capas.

Nuevamente como resultado de esta fisuración temprana, se reduce la impermeabilidad de la capa de rodadura, generando una falla de la nueva repavimentación en un tiempo muy corto.

APLICACION DEL GEOTEXTIL NO TEJIDO. Para obtener la vida útil esperada en la repavimentación con Geotextiles, se deben tener en cuenta los siguientes parámetros: el Geotextil, el concreto asfáltico, el imprimante y su correcta dosificación, la nueva carpeta asfáltica y todo el proceso constructivo. La optimización de la repavimentación no debe basarse únicamente en las propiedades mecánicas del Geotextil.

Los beneficios más importantes al repavimentar con Geotextiles son: la impermeabilidad desarrollada por el Geotextil al impregnarse con el bitumen de liga y la mayor uniformidad que produce entre las capas. Esto aumenta la resistencia de la nueva capa a la fatiga por la flexión y mejora la resistencia al corte entre las dos capas.

La saturación con el imprimante es uno de los puntos más importantes para el éxito de esta técnica. Con una correcta saturación del Geotextil se aseguran los beneficios descritos anteriormente. La aplicación del imprimante debe ser lo más uniforme posible para lo cual se debe utilizar el equipo y la mano de obra adecuada.



El momento ideal para repavimentar es cuado aparezcan las primeras señales de fisuramiento. En este punto la estructura y la subrasante no se han ablandado ni debilitado, debido a que poca agua a logrado pasar a través del pavimento. Si se permite que el fisuramiento continúe, más agua pasará y la estructura del pavimento empezará una etapa de deterioro rápido. Simultáneamente con el paso del agua, la penetración del oxígeno produce el enfríamiento prematuro del asfalto, con el correspondiente fisuramiento debido a la fragilidad del concreto asfáltico.

En la construcción de nuevos pavimentos, se debe colocar el Geotextil entre la base granular y el concreto asfáltico, permitiendo un adecuado sellamiento al paso del agua.

Con la aplicación de Geotextiles, el calcado o reflexión de fisuras se reduce drásticamente. El Geotextil absorbe los esfuerzos que producen las fisuras de tipo terciario, comportándose como una capa de disipación entre las superficies asfálticas.

En parte el efecto que produce el Geotextil se deriva del perfecto contacto que se genera entre las superficies. El Geotextil impregnado se convierte en un medio disipador de cemento asfáltico reforzado, que frena la fisura absorbiendo los esfuerzos provenientes de la capa vieja o deteriorada. La tensión es absorbida por los pequeños movimientos dentro de la capa de Geotextil, evitando que sean transferidos a la nueva capa.

Para comprender mucho mejor el comportamiento de la repavimentación, ésta se asimila a una viga de gran espesor en donde se general los mayores esfuerzos en la parte inferior, cuando por acción de una carga vertical actuando desde la parte superior, se deforma considerablemente. Muchas de las fisuras en los pavimentos se inician desde la base, ascendiendo rápidamente por el efecto que anteriormente se ha descrito.

Con el uso del Geotextil, las capas de pavimento están separadas pero no desligadas, produciéndose movimientos relativos entre ellas sin que se produzcan esfuerzos de tensión elevados que favorezcan la aparición de fisuras. La tensión en cada una de estas capas depende entonces del espesor individual de ellas.

Una analogía aplicable es la forma en que una madera laminada es mucho más flexible que un bloque de madera macizo, llegando a fracturarse primero el bloque que la madera laminada. Todo esto, gracias a la adecuada liga entre las capas que permite cierto tipo de movimiento pero sin perder la integridad de la estructura.

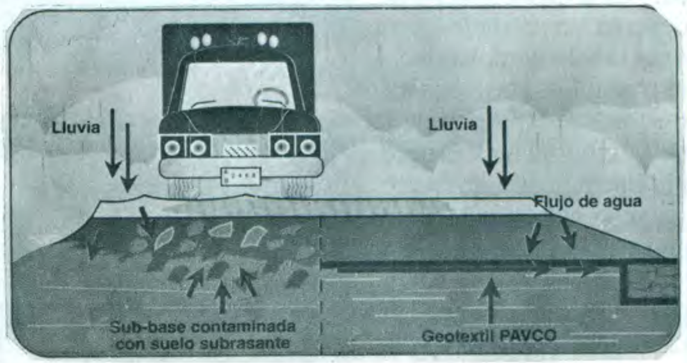
PROPIEDADES DEL GEOTEXTIL. El Geotextil utilizado en repavimentación deberá tener una excelente capacidad de absorber y retener el imprimante. Una sobresaturación en el Geotextil produce inconvenientes de adherencia y demasiada flexibilidad entre capas. Una insuficiente cantidad reduce la adherencia, favoreciendo la aparición de grietas. Además no produce una capa totalmente impermeable.

La elongación del Geotextil en el punto de rotura deberá ser mayor al 50% para asegurar un adecuado comportamiento elástico. Las características mecánicas deberán contemplar valores mínimos que le permitan al Geotextil un buen comportamiento durante la instalación.

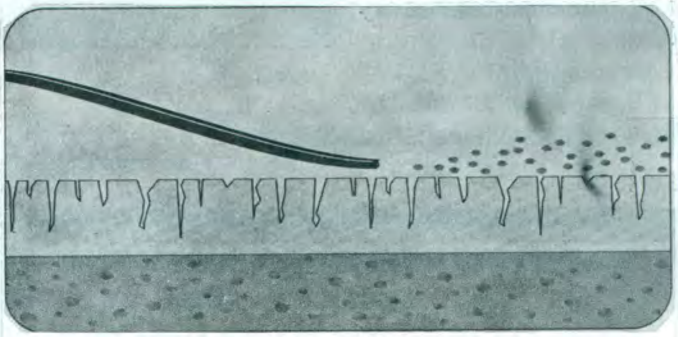
El Geotextil No Tejido de fibras sintéticas es el indicado para la repavimentación vial según las propiedades anteriormente anotadas.

Se ha desarrollado un producto especializado para la repavimentación, modificando los valores de absorción de asfalto y cambiando las texturas para evitar daños durante la instalación por el tránsito de la maquinaria involucrada en el proyecto.

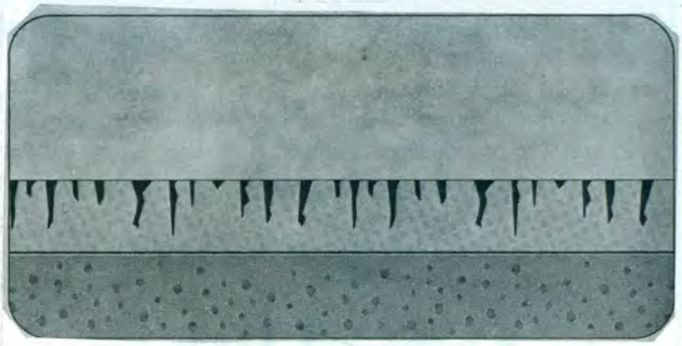
PROCEDIMIENTO CONSTRUCTIVO.



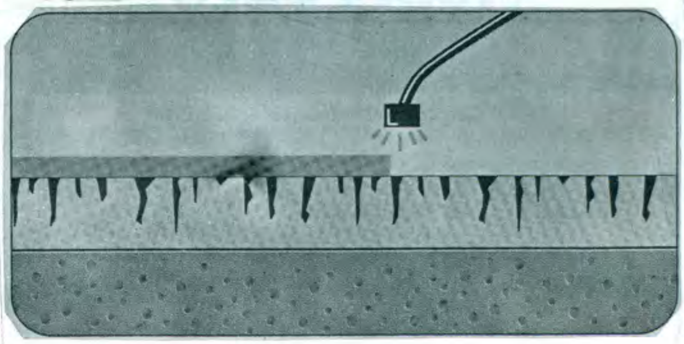
1. Repare las fallas estructurales de la vía. Estas fallas se pueden prevenir colocando un Geotextil que cumpla funciones de separación, refuerzo, filtración y drenaje planar. Si la superficie está altamente deteriorada y con desniveles, estos se renivelarán para obtener una superficie uniforme.



2. Limpie con aire comprimido o con cepillo la superficie.



3. Rellene las fisuras con mezcla asfáltica si la geometría lo permite o con ligante, para lograr una superficie uniforme. Normalmente esta actividad se debe llevar a cabo con anterioridad para asegurar un correcto sellamiento de las fisuras.



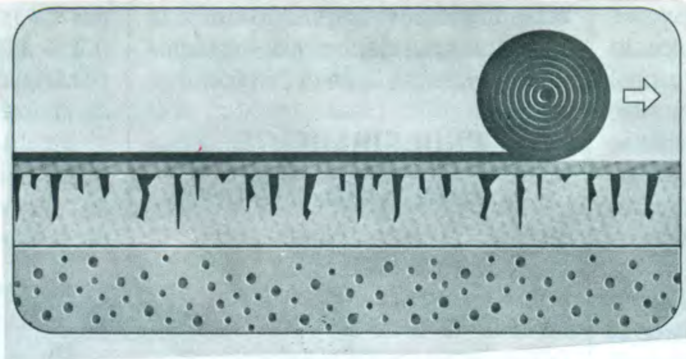
4. Coloque uniformemente el imprimante bituminoso, previa una correcta remoción del polvo y arena, que se ha depositado sobre la vía. Las cantidades de imprimante varían entre los 0.2 a 2.3 lt/m^2 dependiendo de la porosidad de la capa a ser cubierta y de la absorción del Geotextil.

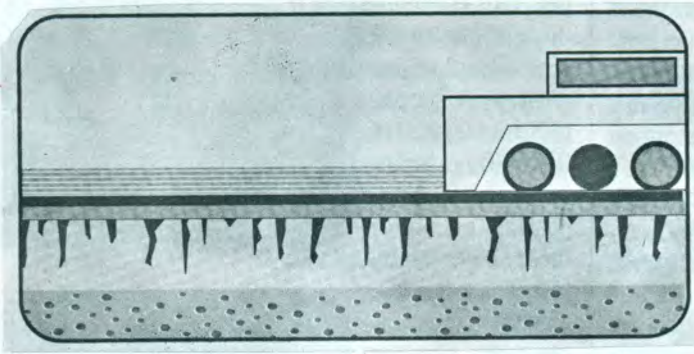
El imprimante recomendado puede ser cemento asfáltico AC-10, AC-20 o emulsiones asfálticas con un porcentaje adecuado de asfalto.

Cuando se utilicen emulsiones deberá esperarse a que lleguen a su punto de rompimiento, para colocar el Geotextil.

5. Instale el Geotextil sobre la superficie imprimida. Las arrugas y dobleces deberán ser cortados para dejar la zona completamente plana. Los traslapos entre capas de Geotextil serán de 10 cm y se deberá agregar ligante extra, para asegurar la adherencia entre ellas.

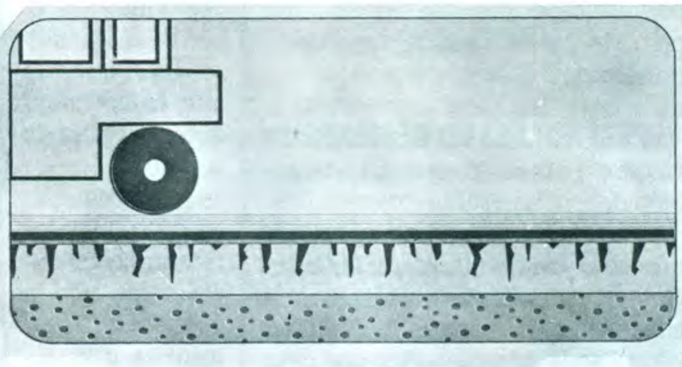
Si existe exceso de imprimante sobre la superficie del Geotextil, se podrá esparcir arena en forma manual para absorber los excesos.





6. Aplique mezcla caliente de concreto asfáltico sobre el Geotextil directamente, cuidando que la temperatura no sobrepase los 150° C.

7. Compacte la nueva carpeta teniendo en cuenta los valores de temperatura máxima para llevar a cabo esta actividad.



BIBLIOGRAFIA.

Alcázar T.E. Recuperación de pavimentos flexibles mediante geotextiles. III Congreso Iberolatinoamericano del Asfalto. Cartagena 1985.

Atkinson D.J. and Gordon R.G. Evaluation of measures for prevention of reflective cracking. Pavement Branch Main Road Department. Queensland - Australia.

Carriker R.W. Economic justification for use of geotextiles in road construction. Amoco Fabrics Company. Atlanta - Georgia U.S.A.

Kirschner R. 20 years experience with asphalt reinforced made of polyester fabrics. Huesker Synthetic, Gescher. Geotextiles, Geomembranes and related Products. Deu Hoedt - Rotherdam 1990.

IFAI. A Design Primer: Geotextiles and related materials Asphalt Overlay St. Paul MN Industrial Fabric Association International 1990.

The Asphalt Institute Manual. Asphalt overlay and pavement rehabilitation. Series No. 17 College Park, MD, Nov. 1977.

Sherman, G. Minimizing reflective cracking af pavement overlays. National Cooperative Highway Research Program Synthetics of Highway Practice 92, Transportation Research Bord, 1982.

Ortiz A. Pardo O., Castañeda E. Utilización de geotextiles en repavimentación de vías Proyecto de Grado, Universidad Industrial de Santander Bucaramanga - Colombia 1992.

Koerner R. Designing with geosynthetics. Second Edition. Prentice - Hall, Englewood Cliffs NJ 1990.

Werner Gerhard. Cálculo de capas de concreto asfáltico con el uso de geotextiles. III Congreso Iberolatinoamericano del asfalto. Cartagena 1985.

Problemas Actuales en el Campo de la Reescritura

Por : Mauricio Ayala Rincón

Ingeniero de Sistemas y Matemático Uniandes. Exdocente Escuela Colombiana de Ingeniería. Becario del DAAD en la Facultad de Informática de la Universidad de Kaiserslautern (R.F.A.). E-mail: ayala@informatik.uni-kl.de.

1. INTRODUCCION.

La teoría de reescritura surge en el contexto del álgebra universal como un mecanismo para calcular en teorías ecuacionales. En el campo de la informática la reescritura aparece como un modelo de computación interesante que asimila el comportamiento de los lenguajes funcionales. El redescubrimiento de la reescritura en el ámbito de la informática fue hecho a finales de la década de los sesenta por Knuth-Bendix [KB70]. A partir de éste trabajo pionero la reescritura ha sido involucrada en diferentes áreas de la informática como por ejemplo, especificación algebráica, prueba automática de teoremas, bases de datos, síntesis de programas, teoría de grafos, etc. Incluso ha resultado relevante en el intento de mezclar los paradigmas de programación funcional y lógica.

Aquí se tratará de introducir al lector en los conceptos básicos de reescritura para luego proponer algunos de los problemas actuales en éste campo.

A mediados de la década de los 80 se inició una serie de conferencias internacionales bianuales con el fin de unificar conceptos y de reunir a los estudiosos de este nuevo campo de la informática ([Jou85], [Jou87], [Der89] [Boo91]). Los problemas expuestos son tomados de una lista de 44 problemas abiertos publicados en la última conferencia de ésta serie.

Se recomiendan tres diferentes introducciones actuales en el campo de la reescritura, a saber: [AM90], Klo90] y [DJ90]. También pueden consultarse las notas del autor [Aya92] para los conceptos básicos y para localizar el estudio de la reescritura dentro de un contexto más amplio.

2. NOTACION Y CONCEPTOS BASICOS.

Aquí se revisa brevemente la notación y los resultados básicos de especificaciones ecuacionales y de sistemas de reescritura. Se suponen conocimientos básicos de lógica matemática y álgebra.

Se trabajará con un conjunto de términos $T_\Sigma(X)$ construídos a partir de un conjunto enumerable de símbolos de función con sus respectivas aridades en Σ y de un conjunto enumerable de variables X.

Cada símbolo de función f en Σ tiene una *aridad* $n \geq 0$ que es el número de argumentos que ésta tiene en un término bien formado. Los símbolos de función de *aridad* cero son precisamente las constantes. Los términos libres de variables son denominados **términos básicos**. Se escribe $u[t]$ para denotar un término que tiene a t como subtérmino. $u[\bullet]$ denota el **contexto** en el cuál t ocurre en el término $u[t]$. Se denota con $t|_\pi$ el subtérmino de t en la posición π. $u[t]_\pi$ denota el término que tiene a t como subtérmino en la posición π. Un subtérmino de t es denominado propio cuando es distinto de t. Una **sustitución** es una aplicación de variables (en X) a términos (en $T_\Sigma(X)$). Se usan minúsculas griegas para denotar las sustituciones y se describen explícitamente como $\{x_1 \to t_1, ..., x_n \to t_n\}$, donde $x_1, ..., x_n$ son las variables dominio de la sustitución y $t_1, ..., t_n$ sus respectivas imágenes (términos en $T_\Sigma(X)$). Una sustitución σ puede extenderse naturalmente a una función del conjunto de términos $T_\Sigma(X)$ en sí mismo. Así, $t\sigma$ es la **instancia** del término t que resulta de aplicar la sustitución σ a las variables de t sin alterar la estructura del término. Por ejemplo si $\sigma = \{x \to f(a)\}$ entonces $g(a, f(x))\sigma = g(a, f(f(a)))$.

$\to$ denotará una relación binaria sobre un conjunto de términos. Una relación $\to$ es llamada una **relación de reescritura** si para todo contexto $u[\bullet]$ y substitución σ, si $s \to t$ entonces $u[s\sigma]_\pi \to u[t\sigma]_\pi$.

Si $\to$ es una relación binaria sobre t, entonces $\leftarrow$ denotará su inversa, $\leftrightarrow$ su clausura simétrica, $\to^=$ su clausura reflexiva, $\to^+$ su clausura transitiva y $\to^*$ su clausura reflexiva-transitiva. Una relación binaria $\to$ sobre un conjunto $T_\Sigma(X)$ es **terminante** si no existen cadenas infinitas $t_1 \to t_2 \to ...$ de elementos de $T_\Sigma(X)$[(1)].

Una **ecuación** es un par ordenado de términos escrito de la forma $s = t$ donde las variables en s y t se interpretan como universalmente cuantificadas. Un conjunto de ecuaciones

(1) en otras palabras, si su clausura transitiva $\to^+$ es bien fundada.

E especifica una teoría ecuacional $=_E$ sobre el conjunto de términos $T_\Sigma(X)$ que es obtenida usando como axiomas todas las instancias de ecuaciones en E y como reglas de inferencia la reflexividad $(x = x)$, la simetría $(x = y \Rightarrow y = x)$, la transitividad $(x = y \& y = z \Rightarrow x = z)$ y aplicaciones a contextos $(x = y \Rightarrow u[x] = u[y])$(ver por ejemplo [EM85]). Por la completitud del cálculo de primer orden con la igualdad(2), la validez y la derivabilidad coinciden. Así, se puede definir la teoría ecuacional usando una **relación de remplazamiento** $\Leftrightarrow$, basada en la idea de "remplazamiento de iguales por iguales". Específicamente, $s \Leftrightarrow t$, si existe una ecuación $l = r$ en E, una sustitución σ y una posición π en s tales que, $s|_\pi \equiv l\sigma$ y $t \equiv s[r\sigma]_\pi$ (donde $\equiv$ denota la igualdad sintáctica). Intuitivamente se puede remplazar una instancia de un lado de una ecuación en E por la respectiva instancia del otro lado de la ecuación. Se puede mostrar que $s =_E t$ si y solamente si $s \Leftrightarrow^* t$ donde $\Leftrightarrow^*$ es la clausura reflexiva-transitiva de $\Leftrightarrow$. En otras palabras se puede mostrar que dos términos son iguales en E si uno puede ser obtenido del otro mediante un número fínito de remplazamientos de subtérminos iguales. Una prueba ecuacional de $s =_E t$ es, por tanto, una sucesión de tales pasos de remplazamiento, a saber: $s \equiv s_0 \Leftrightarrow s_1 \Leftrightarrow, ..., \Leftrightarrow s_n \equiv t$, de $n \geq 0$ aplicaciones de axiomas ecuacionales.

El **problema de la palabra** para un conjunto E de ecuaciones es el de decidir si una ecuación $s = t$ entre dos términos básicos se sigue de E, esto es, decidir si $s \Leftrightarrow^* t$. Comprobar si $s \Leftrightarrow^* t$ es conocido como el problema de **validez**. El problema de **satisfactibilidad** es el de ver si existe una sustitución σ para dos términos s y t tal que $s\sigma \Leftrightarrow^* t\sigma$.

Ejemplo 2.1 *Las siguientes tres ecuaciones, G, especifican la teoría de grupos,* $=_G$.

$e * x = x$	*elemento neutro*
$x^{-1} * x = e$	*inversa*
$(x * y) * z = x * (y * z)$	*asociatividad*

$e * e = e$ se sigue de G por ser una instancia de la primera ecuación (para la sustitución $\{x \to e\}$). También $y * e =_G y$ vale por el siguiente remplazamiento: $y \Leftrightarrow e * y \Leftrightarrow (y^{-1^{-1}} * y^{-1}) * y \Leftrightarrow y^{-1^{-1}} * (y^{-1} * y) \Leftrightarrow y^{-1^{-1}} * e \Leftrightarrow y^{-1^{-1}} * (e * e) \Leftrightarrow (y^{-1^{-1}} * e) * e \Leftrightarrow (y^{-1^{-1}} * (y^{-1} * y)) * e \Leftrightarrow ((y^{-1^{-1}} * y^{-1}) * y) * e \Leftrightarrow (e * y) * e \Leftrightarrow y * e$.

Una **regla de reescritura** sobre un conjunto de términos $T_\Sigma(X)$ es un par ordenado de términos escrito como $l \to r$. Un **sistema de reescritura** R es un conjunto de tales reglas. Las reglas pueden ser usadas para remplazar instancias de l por instancias de r correspondientes; pero no pueden ser usadas en la dirección contraria, como es el caso con ecuaciones. En efecto la principal idea de reescritura es imponer direccionalidad al uso de la ecuaciones. Se usa $\to$ para denotar la relación de reescritura. Se dice que un término s **reescribe** en el término t, denotado por $s \to t$, si existe una regla $l \to r$, en R, una posición π en s y una sustitución σ tales que $s|_\pi \equiv l\sigma$ y $t \equiv s[r\sigma]_\pi$. Se dice que t es **derivable** de s si $s \to^* t$. Al aplicar reglas en posiciones disyuntas de un término s obteniendo un término t se tiene reescritura en paralelo, denotada por $s \to^{\parallel} t$. Si no se repite ninguna variable en l la regla es denominada **lineal por izquierda**. Si no se repite ninguna variable en r la regla es denominada **lineal por derecha**. Si ambas condiciones se cumplen es denominada lineal.

Un término s es **reducible** por el sistema de reescritura R si existe un término t tal que $s \to t$; de otra manera se dice que s es **irreducible** o que está en forma normal o canónica. Se escribe $s \to^! t$ si $s \to^* t$ y t es irreducible, en cuyo caso t es denominado **forma normal** de s. Dos términos s y t son **juntables** si existe un término u tal que u es derivable de s y t, es decir $s \to^* u \,^*\!\leftarrow t$, Lo que es denotado brevemente por $s \downarrow t$.

Ejemplo 2.2 *Orientando las ecuaciones de G se obtiene un sistema de reescritura, R_G.*

$$e * x \to x$$
$$x^{-1} * x \to e$$
$$(x * y) * z \to x * (y * z)$$

Los conceptos de reescritura, derivabilidad y reescritura en paralelo se aclaran confirmando los siguientes hechos para R_G: $e * (y^{-1} * y) \to (y^{-1} * y)$, $e * (y^{-1} * y) \to e * e$,

(2)Más exactamente, por el teorema de completitud de Birkhoff para teorías ecuacionales (ver por ejemplo [Wec92]).

$e * (y^{-1} * y) \rightarrow^* e$, $(e * e) * (y^{-1} * y) \rightarrow^!$ $e * e$. Note que $(y^{-1} * y) * e \rightarrow^* e$ pero $(y^{-1} * y) * e \not\rightarrow^! e$. $(z * y^{-1}) * (y * x) \rightarrow^!$ $z * x$, luego $z * x$ es una forma normal de $(z * y^{-1}) * (y * x)$. Note que R_G es lineal por derecha pero no por izquierda.

Definición 2.1. *Un sistema de reescritura R es llamado* **terminante** *si la relación de reescritura, $\rightarrow$, es terminante.*

Una condición necesaria para la terminalidad es que todas las variables en la parte derecha de una regla de *R* aparezcan también en la parte izquierda de la regla. Por ejemplo, para la regla $a \rightarrow y$ con la sustitución $\{y \rightarrow f(a)\}$ se tiene una derivación infinita, a saber,
$a \rightarrow f(a) \rightarrow f(f(a)) \rightarrow ...$

Cuando un sistema es terminante cada término tiene al menos una forma normal.

La terminalidad de un sistema de reescritura es una propiedad indecidible, como fue demostrado por Huet y Lankford [HL78]. La prueba se basa en el hecho de que las máquinas de Turing se pueden simular con reglas de reescritura y por la indecidibilidad del problema de la parada para máquina de Turing se deriva la indecidibilidad de la terminación de los sistemas de reescritura.

Definición 2.2. *Una relación de reescritura es denominada confluente si todo par de términos s, t derivables de un mismo término u son juntables. Esto es, $t \,^*\!\leftarrow u \rightarrow^* s$ implica $s \downarrow t$. Ver figura 1.*

Un sistema R es denominado **canónico** si es terminante y confluen-

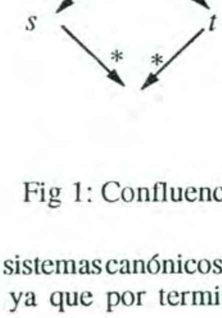


Fig 1: Confluencia.

te. Los sistemas canónicos son interesantes ya que por terminalidad se garantiza la existencia de formas normales y por confluencia se garantiza que sólo una forma normal puede existir. Por ende, en sistemas canónicos, para ver si dos términos son iguales basta con buscar sus formas normales y compararlas sintácticamente.

Al igual que la terminación la confluencia es una propiedad indecidible. Una propiedad más débil que en ocasiones resulta útil es la confluencia local.

Definición 2.3 *Una relación de reescritura es llamada* **local-confluente** *si todo par de términos s, t que se obtienen de reescribir un mismo término u son juntables. Esto es, $t \leftarrow u \rightarrow s$ implica $s \downarrow t$. Ver figura 2.*

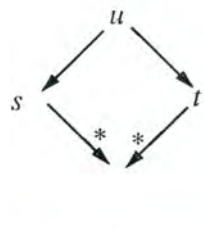


Fig 2: Confluencia local.

Evidentemente confluencia implica confluencia local. El siguiente ejemplo muestra que la recíproca no es válida.

Ejemplo 2.3 *La figura 3 representa un sistema de reescritura. Por*

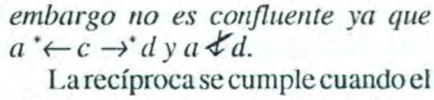


Fig 3: Local-confluencia no implica confluencia.

simple inspección se puede ver que el sistema es local-confluente. Sin embargo no es confluente ya que $a \,^*\!\leftarrow c \rightarrow^* d$ y $a \not\downarrow d$.

La recíproca se cumple cuando el sistema es terminante como establece el siguiente lema.

Lema 2.1 (Newman) *Un sistema de reescritura terminante es confluente si y solamente si es local-confluente.*

Prueba: Suponiendo que *R* es terminante se debe demostrar únicamente que confluencia local implica confluencia. La demostración es por

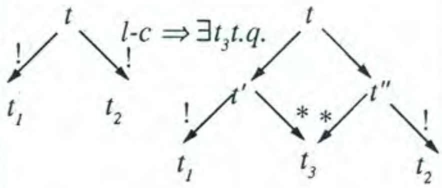


Fig 4: Terminación + l-c $\Rightarrow$ confluencia.

contradicción. Supóngase que *R* no es confluente. Terminalidad y no confluencia implican la existencia de términos con formas normales diferentes llamados términos *malos*. De la confluencia local se sigue que si *t* es un término malo entonces $t \rightarrow t'$ para algún otro término *malo t'*, ver figura 4. Se obtiene así una cadena infinita $t \rightarrow t' \rightarrow ...$ de términos malos. Por contradicción *R* debe ser confluente. □

Otra propiedad útil es la confluencia fuerte.

Definición 2.4 *Una relación de reescritura es llamada* **fuertemente-confluente** *si para todo par de términos s, t que se obtienen de reescribir un mismo término u existe un término v tal que $s \rightarrow^* v \rightarrow^= \leftarrow t$.*

Se ha demostrado (no trivialmente) que todo sistema fuertemente-confluente es confluente. Note la importancia de la simetría en la anterior definición: ¡el ejemplo 2.3 no es fuertemente-completo!

Otro mecanismo importante para comprobar la confluencia de sistemas de reescritura (terminantes) es la inspección de los denominados pares críticos.

Definición 2.5 *Sean $l \rightarrow r$ y $l' \rightarrow r'$ dos reglas de un sistema de reescritura R. El par ordenado <s,t> es denominado un* **par crítico** *(abreviando un* **PC***) entre las dos reglas si para alguna sustitución σ y algún subtérmino (no-variable) de l en la posición π, $l|_\pi \sigma \equiv l'\sigma$, $s \equiv r\sigma$ y $t \equiv l[r']_\pi \sigma$. Se dice que $l\sigma$ es una*

superposición crítica, *y se tiene* $s \equiv r\sigma \leftarrow l\sigma \rightarrow l[r']_{\pi}\sigma \equiv t$. *Esto es s y t se obtienen al reescribir la superposición crítica. Un PC < s, t> es juntable si* $s \downarrow t$.

Ejemplo 2.4 *Considere nuevamente* R_G *del ejemplo 2.2. Usando las dos primeras reglas de* R_G *se tiene:* $(y^{-1} * y) \leftarrow e * (y^{-1} * y) \rightarrow e * e$. *Luego* $< (y^{-1} * y), e * e >$ *es un PC de* R_G *(que además es juntable).*

Los PCs son útiles para determinar si un sistema terminante es confluente y por tanto canónico. Se tiene el famoso lema de Knuth- Bendix [KB70].

Lema 2.2 (Knuth-Bendix) *Un sistema de reescritura terminante es local-confluente si y solamente si todos sus PCs son juntables.*

De los lemas de Knuth-Bendix y de Newman resulta que la terminación implica la confluencia si y solamente si todos los PCs son juntables. Un caso particular se presenta cuando el sistema es terminante y no tiene pares críticos.

Un sistema de reescritura R es **correcto** con respecto a un sistema de ecuaciones E, si la relación de derivabilidad $\rightarrow^*$ de R es un subconjunto de la relación de remplazamiento $\Leftrightarrow^*$ de E; esto es, para cada par de términos s y t se cumple: $s \rightarrow^* t$ implica $s \Leftrightarrow^* t$. Un sistema de reescritura R es **completo** para E si cada par de términos remplazables en E son juntables en R; esto es, $s \Leftrightarrow^* t$ implica $s \downarrow t$. Si R es al mismo tiempo correcto y completo para E, entonces el problema de validez para E- ¿es $s \Leftrightarrow^* t$? - es el mismo problema de comprobar si $s \downarrow t$. Si R consta de un número finito de reglas y es canónico, entonces esto puede efectuarse más eficientemente comprobando si s y t tienen la misma forma normal. Así, para aquellas teorías ecuacionales para las cuáles se pueden encontrar sistemas de reescritura finitos canónicos correctos y completos se tiene un procedimiento de decisión efectivo para el problema de validez. Los **métodos de completación** son mecanismos que tratan de obtener un sistema de reescritura canónico a partir de un conjunto dado de axiomas ecuacionales.

Ejemplo 2.5 *De la completación del ejemplo de teoría de grupos se obtiene el siguiente sistema canónico,* R_C.

$e * x \rightarrow x$	$e^{-1} \rightarrow e$
$x * e \rightarrow x$	$(x * y)^{-1} \rightarrow y^{-1} * x^{-1}$
$x^{-1} * x \rightarrow e$	$x * (x^{-1} * y) \rightarrow y$
$x * x^{-1} \rightarrow e$	$x^{-1} * (x * y) \rightarrow y$
$(x * y) * z \rightarrow x * (y * z)$	$(x^{-1})^{-1} \rightarrow x$

R_C *es un mecanismo para responder cualquier pregunta ecuacional en la teoría de grupos. Así, para probar si:* $y^{-1} * (e * x)^{-1} =_G ((x * e) * y)^{-1}$ *basta con derivar cada término hasta obtener las respectivas formas normales y compararlas sintácticamente:* $y^{-1} * (e * x)^{-1} \rightarrow^! y^{-1} * x^{-1} \,{}^!\!\leftarrow ((x * e) * y)^{-1}$. *Para entender la importancia de este mecanismo compare esta prueba con la que se obtendría usando la relación de remplazamiento de* $=_G$.

Dauchet demostró que los sistemas de reescritura que consisten de una sola regla y que además son lineales por izquierda y sin PCs son más expresivos que las máquinas de Turing e igualmente en éste caso la terminación resulta indecidible.

Por ahora se dispone de un método para comprobar la confluencia de sistemas de reescritura terminantes: por los lemas de Newton y de Knuth-Bendix basta con probar la juntabilidad de los PCs. Resulta entonces importante explorar la confluencia de sistemas de reescritura que no son terminantes. Primero, nótese que en este caso la juntabilidad de los PCs no implica la confluencia. Nuevamente el ejemplo 2.3 sirve de contraejemplo. Pero la situación es aún más complicada.

Ejemplo 2.6 *Aún sin PCs la confluencia no es válida como ilustra el siguiente sistema de reescritura, R.*

$f(x,x) \rightarrow b$
$g(x) \rightarrow f(x,g(x))$
$a \rightarrow g(a)$

Primero note que R no es terminante (la tercera regla genera trivialmente una derivación infinita). Note también que R no tiene PCs. Se tiene $b \leftarrow f(g(a),g(a)) \leftarrow f(a,g(a)) \leftarrow g(a) \rightarrow g(g(a)) \rightarrow g(f(a,g(a))) \rightarrow g(f(g(a), g(a))) \rightarrow g(b)$. *Por otro lado* $b \not\downarrow g(b)$ *ya que b es una forma normal no-derivable de g(b). Luego R no es confluente. El problema es debido a que R no es lineal por izquierda.*

Se tiene que sistemas de reescritura (ya sean terminantes o no) que son lineales por izquierda y sin PCs son confluentes. Estos sistemas han sido profundamente estudiados por satisfacer la confluencia y son habitualmente llamados **ortogonales**.

3. PROBLEMAS ABIERTOS.

Se presentan a continuación dos problemas abiertos citados en la última conferencia internacional en el campo de reescritura y sus aplicaciones [Boo91].

1. Suponga que R es un sistema de reescritura lineal por izquierda. ¿Es alguna de las siguientes condiciones suficiente para garantizar la confluencia de R?

- $\forall$ *<s,t> PC de R,* $t \rightarrow^{\parallel} s$.
- $\forall$ *<s,t> PC de R,* $t \rightarrow^{=} s$.
- $\forall$ *<s,t> PC de R, o bien* $s \rightarrow^{=} t$ *o* $t \rightarrow^{=} s$.

2. ¿Es decidible la terminación de sistemas de reescritura que constan de una sola regla y que además son lineales por izquierda y por derecha?.

En el problema 1 note que una respuesta afirmativa para el primer caso implica una respuesta afirmativa para el segundo caso. Se hace énfasis en que sistemas de reescritura lineales por izquierda para los cuales se cumple lo siguiente:

- $\forall$ *<s,t> PC de R,* $s \rightarrow^{\parallel} t$.

son confluentes. Huet [Hue80] probó, mediante un examen extensivo (considerando todos los casos de una posible divergencia de términos), que bajo estas hipótesis R es fuertemente-confluente. Usando entonces el hecho de que los sistemas fuertemente-confluentes son confluentes se obtiene la confluencia de *R*. Note que este resultado implica directamente que sistemas de reescritura lineales por izquierda para los cuales se cumple lo siguiente:

- $\forall \langle s,t \rangle$ *PC de* $R, s \rightarrow^{=} t$.

son también confluentes. Por otro lado, si alguna de las condiciones del problema 1 es insuficiente, los contraejemplos deben ser no-terminantes, no lineales por derecha y por supuesto no ortogonales (con pares críticos).

Para el problema 2 se enfatiza que Dauchet ha demostrado que los sistemas de reescritura lineales por izquierda y sin pares críticos que constan de una sola regla son tan expresivos como las máquinas de Turing y por ende, en este caso, la terminalidad es indecidible. Este resultado fue presentado en la tercera conferencia internacional en reescritura y sus aplicaciones [Der89].

Cualquier resultado que contribuya a la solución de alguno de estos problemas será bienvenido por los investigadores del campo de reescritura. ■

BIBLIOGRAFIA

[AM90] J. Avenhaus and K. Madlener. Formal Techniques in Artificial Intelligence, capítulo 1, Term Rewriting and Equational Reasoning. R. B. Banerji (Ed.) North-Holland, 1990.

[AYA92] M. Ayala. Conditional and unconditional rewriting systems. Notas para charlas en el seminario de postgrado del grupo FIDIAS, Depto. Sist. y Comp. Uniandes., Universidad Kaiserslautern, Marzo 1992.

[Boo91] R. V. Book, editor. Proc. Fourth Int. Conf. on Rewriting Techniques and Applications, Como, Italy, volumen 488 de Lecture Notes in Computer Sciences. Springer Verlag, Abril 1991.

[Der89] N. Dershowitz, editor. Proc. Third Int. Conf. on Rewriting techniques and Applications, Chapel-Hill NC. USA., volumen 355 de Lecture Notes in Computer Sciences. Springer Verlag, Abril 1989.

[DJ90] N. Dershowitz and J.-P. Jouannaud. Handbook of Theoretical computer science, volumen 2, capítulo 6, Rewrite Systems. Elsevier Science Publishers B. V., 1990.

[EM85] H. Ehrig and B. Mahr. Fundamentals of Algebraic Specification 1. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer-Verlag, 1985.

[HL78] G. Huet and D. Lankford. On the uniform halting problem for term rewriting systems. En Rapport Laboria 283, Institut de Recherche d'Informatique et d'Automatique, Le Chesnay, France, 1978.

[Hue80] G. Huet. Confluent reductions: Abstract properties and applications to term rewriting systems. Journal of the Association for Computing Machinery, 27(4): 797-821, Octubre 1980.

[Jou85] J-P. Jouannaud, editor. Proc. Rewriting Techniques and Applications, Dijon, France, volumen 202 de Lecture Notes in Coputer Sciences. Springer Verlag, Mayo 1985.

[Jou87] J-P. Jouannaud, editor. Proc. Rewriting Techniques and Applications, Bordeaux, France, volumen 256 de Lecture Notes in Computer Sciences. Springer Verlag, Mayo 1987.

[KB70] D.E. Knuth and P.B. Bendix. Computational Problems in Abstract Algebra, capítulo Simple Words Problems in Universal Algebras. J. Leech, ed. Pergamon Press, Oxford, U.K., 1970.

[Klo90] J.W. Klop. Term rewriting systems from churchrosser to knuth-bendix and beyond. En M. S. Paterson, editor, Automata, Languages and Programming, 17th International Colloquium, Warwick, England, Julio 1990.

[Wec92] W. Wechler. Universal Algebra for Computer Scientists. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer-Verlag, 1992.